Міністерство внутрішніх справ України
ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ

ЕЛЕМЕНТИ КЛАСИЧНОЇ ЛОГІКИ

Навчальний посібник

Колектив авторів

За загальною редакцією
доктора філософських наук, професора
В.В. Кузьменка

Дніпропетровськ
«Ліра ЛТД»
2016

ББК 87.4
Е 50

Рекомендовано до друку Вченою радою ДДУВС
(протокол № 6 від 25.02.2016)

РЕЦЕНЗЕНТИ: д-р юрид. наук, доц. **Максакова Р.М**. – зав. каф. конституційного, адміністративного та трудового права Інституту управління та права Запорізького національного технічного університету; д-р юрид. наук, проф. **Єрмоленко Д.О.** – проректор з науково-педагогічної роботи та допрофесійної підготовки, проф. каф. історії держави і права та міжнародного права Класичного приватного університету.

Е 50 Елементи класичної логіки : навч. посібник / кол. авт. ; за заг. ред. д.філос.н., проф. В. В. Кузьменка. – Дніпропетровськ : Дніпроп. держ. ун-т внутр. справ, 2016. – 236 с.

ISBN 978-966-383-712-3

Представлено конструктивний та аксіоматичний підходи, що становлять підґрунтя сучасної логіки, яка отримала назву «класична». Розглянуто сучасну класичну логіку як інструмент здобуття будь-якого виду знання, що належить до різноманітних наук (світоглядних, юридичних чи природничих). Передбачено озброєння читача логічним інструментом як запорукою правильного мислення, тобто побудови моделей ситуацій, що виникають у юридичній практиці. У межах вивчення класичної логіки запропоновано вправи та задачі для студентів і курсантів юридичних спеціальностей.

Розраховано на курсантів, студентів і слухачів юридичних вузів, а також усіх, хто цікавиться питаннями сучасної класичної логіки.

Автори:

Кузьменко В. В. – зав. каф. філософії та політології, д-р філос. наук, проф.; **Наливайко Л. Р.** – зав. каф. загальноправових дисциплін, д-р юрид. наук, проф.; **Шинкаренко І. О.** – доц. каф. філософії та політології, канд. психол. наук, доц.; **Савіщенко В. М.** – т.в.о. декана факультету № 4, канд. пед. наук, доц.; **Царьова І. В.** – доц. каф. соціально-гуманітарних дисциплін, канд. філол. наук; **Головіна О. В.** – доц. каф. філософії та політології, канд. істор. наук.

(Дніпропетровський державний університет внутрішніх справ)

ISBN 978-966-383-712-3 ББК 87.4

З М І С Т

ВСТУПНЕ СЛОВО

ЛОГІКА – ІНСТРУМЕНТ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ, СИСТЕМАТИЗОВАНЕ ЗНАННЯ ПРО ФОРМИ МИСЛЕННЯ

Для того, щоб визначити, що таке логіка, необхідно з'ясувати мету пізнавальної діяльності не лише стосовно картини світу, а й форм життя суспільства. Передусім, вона полягає в досягненні істини за допомогою емпірії та мислення. Логіка – систематизоване знання, що визначає закономірності мислення з метою досягнення істини. Водночас за допомогою мислення істина досягається лише іноді. Для процесу пізнання, крім розумової діяльності, необхідним є експеримент, що підтверджує результати розумової діяльності.

Логіку можна визначити як інструмент пізнавальної діяльності, систематизоване знання про форми мислення. Оскільки дослідження мислення як психічного процесу є також предметом психології, то для з'ясування предмета логіки потрібно окреслити відповідні відмінні риси тлумачень мислення. Так, мислительну діяльність варто розглядати з двох позицій: по-перше, як процес свідомості, по-друге, як засіб досягнення істини.

Психологія вивчає розумову діяльність як процес, притаманний суто свідомості. Психологія з'ясовує, як власне відбувається процес мислення. З іншої позиції, мислення необхідно розглядати як засіб досягнення істини. Логіка досліджує, яким формальним законам підпорядковується мислення в процесі досягнення істини. Відмінність між логікою та психологією стосовно процесу мислення можна представити таким чином. Психологія розглядає особливості перебігу всіх можливих процесів розумової діяльності: міркування генія, марення хворого, процес розумового розвитку дитини. Для психології особливості кожного окремого процесу розумової діяльності становлять однаковий інтерес. Психологія лише вивчає, як здійснюється процес розумової діяльності.

Логіка як інструмент пізнавальної діяльності досліджує закономірності оформлення думки. У цьому контексті вона наближена до граматики, що формує правила, яким має підкорятися мова. Логіка досліджує форми, яким має підкорятися мислення в процесі досягнення істини.

Предмет дослідження логіки

Низка фактів споглядаються безпосередньо. Водночас серед них існують такі, істинність яких виявляється завдяки іншим положенням. Якщо стверджувати: «я голодний», «я чую звук», «я відчуваю тяжкість», «я бачу, що цей предмет круглий», «я бачу, що цей предмет рухається», то можна констатувати, що зазначені факти є безпосередньо пізнаваними, тобто очевидними, адже не потребують жодних доказів. Отже, їх істинність є очевидною та не потребує доказів. До безпосередньо очевидних положень належать, передусім, такі, що є результатом чуттєвого сприйняття. Усі факти, які відбуваються за нашої відсутності (наприклад, минулі явища або майбутні), можуть бути пізнані лише опосередковано. «Я бачу, що дощ іде» – це факт безпосереднього пізнання; «… що вночі йшов дощ» – факт опосередкованого пізнання, адже дізнаємося про це завдяки іншому факту – наявності мокрої землі. Факти опосередкованого пізнання є наслідком міркування – висновку. Якщо руїни, то стверджуємо, що раніше тут було місто. Коли б ми перебували на цьому місці тисячу років тому, то безпосередньо сприйняли б це місто. Залишений слід свідчить, що проїхав вершник. Якщо б ми перебували тут годину тому, то безпосередньо сприйняли б самого вершника. Опосередковане знання доводиться за допомогою безпосередніх знань, воно є переконливим, очевидним. Зазначений процес називається доказом.

Існують положення, які не потребують доказів. Проте є й такі, що потребують доведень, очевидність яких вбачається побічно. Якщо є положення, які потребують доведень, то в чому ж полягає доказ? Доказ полягає в тому, що неочевидні становища ми намагаємося звести до положень чи фактів безпосередньо очевидних. Такого роду зведення положень неочевидних до положень очевидних найкраще можна спостерігати на математичних доказах. Якщо візьмемо, наприклад, теорему Піфагора, то вона на перший погляд є зовсім неочевидною. Але якщо ми почнемо її доводити, то, переходячи від одного положення до іншого, ми прийдемо зрештою до аксіом і визначень, які мають безпосередньо очевидний характер. Тоді й сама теорема стане для нас очевидною. Таким чином, пізнання опосередковано потребує доказів.

Пізнання безпосередньо не потребує доказів та слугує основою для доказу пізнань опосередкованих. Помітивши відношення між положеннями опосередковано очевидними й положеннями безпосередньо очевидними, ми можемо зробити висновок про предмет логіки. Коли доводимо що-небудь, зводимо неочевидні положення до безпосередньо очевидних, можемо припуститися помилки: наш висновок може бути помилковим. Але існують розкриті й систематизовані ще в античності формальні правила, які показують, як розрізняти правильні та помилкові висновки. На ці формальні правила вказує логіка.

Предметом дослідження логіки є формальні правила, яким повинен відповідати висновок, щоб бути правильним. Адже, будучи розкритими ще в античності, такі правила показують, як побудувати правильний висновок.

Розділ 1
ПАРАДИГМИ ОНТОЛОГІЇ ПОБУДОВИ ЛОГІЧНОГО ЗНАННЯ

Актуальність вивчення парадигми онтології побудови логічного знання зумовлена необхідністю постійної філософської рефлексії логічного пізнання, яка була запроваджена ще Аристотелем і триває донині. Логіка, як і будь-яка інша наука, передбачає ретельне визначення свого предмета. Як і для інших галузей наукового пізнання, для логіки завдання власного обґрунтування є завжди актуальним, вона має незмінний характер. Самостійно впоратись із цим теоретико-методологічним питанням вона не спроможна. Допомогти їй не може ні історичний досвід, ні найвищий рівень абстрактності її побудов, ні властивий логічному пізнанню унікальний рівень теоретизування. За сукупністю всіх зазначених характеристик, таких необхідних для самовизначення, з логікою не зрівняється жодна наука. Проте проблема залишається нерозв'язною в межах власне логіки. Різні варіанти її рішення – висунення як можливого предмета силогістичних фігур, знаково-символічних побудов, необхідних для обчислення висловлювань, а також комунікативних відносин – ставали лише дескрипціями.

Питання про те, що у філософському контексті становлять собою об'єкти логіки – силогізми, знаково-символічні побудови (кодифікацію об'єктів логіки розпочато в Образі Аристотеля), обговорюються починаючи з Античності й донині. З XVII століття уточнюється філософське трактування знаково-символічного числення висловлювань, з XIX століття – сутність комунікативних відносин. Постійне виявлення в процесі пізнавальної діяльності нових властивостей логічних абстракцій позначалося також на структурі логічних міркувань, що виявилося в абстрактних формалізованих системах XX століття.

Найважливішою філософсько-методологічною проблемою логіки, пов'язаної з визначенням її предмета, є трактування онтологічного статусу її об'єктів. Вона зумовлена зміною в певні проміжки часу таких факторів, як філософсько-світоглядні, гносеологічні, методологічні установки. У філософсько-методологічному аспекті актуальним є виявлення зв'язку логіки й онтології, розроблення з цією метою концепції логічної онтології на базі аналізу зазначених чинників, що детермінують особливості постановки логічних проблем і побудови знання в гносеологічних традиціях епох Античності, Нового часу, XIX та XX століть.

У цей час триває трактування поняття «онтологія логічного знання». Її обґрунтування в контексті власних досліджень у неявному вигляді започатковано в XIX столітті в працях Г. Кантора, Г. Грассмана, Р. Грассмана, Г. Фреге і триває донині. Суперечки про те, з допомогою яких пізнавальних інструментів можна розглядати онтологічний статус об'єктів логіки, не стихають у сучасній філософії. У понятті «онтологія логічного знання» відображені філософські вчення про буття, започатковані в античності й завершені феноменологічними побудовами Е. Гусерля. Йдеться про питання стосовно того, де існує об'єкт логічних побудов – у світі ідеальних сутностей, як стверджують платоніки; у взаємовідношенні субстанцій і супідрядності рівнів буття, у чому переконані прихильники вчення Р. Декарта і Р. Лейбніца; у розумі логіка, на чому наполягають прихильники вчення І. Канта, або ж, на думку прибічників феноменологічного підходу, у зовнішньому світі, з чим погоджуються сучасні філософи.

Проблеми генези логіки в контексті методології, філософії, історії науки в XIX і XX століттях активно аналізувалися зарубіжними та вітчизняними авторами. Логіка рефлектувалась у всьому обсязі її теоретичного та історичного розвитку. Назвемо лише найбільш відомі імена істориків науки, філософів, які працювали в цьому напрямі: Я. Лукасевич, Л. Вітгенштейн, К. Поппер, А. Сабо, А. Уайтхед, Г. Фреге та ін. Особливе місце посідає постать науковця Б. Рассела, який зробив вагомий внесок у розвиток математичної логіки. Серед сучасних логіків, філософів та істориків науки найбільш яскравими представниками є: В. Асмус, А. Ахутін, В. Башмакова, П. Гайденко, Ю. Єршов, С. Кримський, А. Огірків, Т. Ойзерман, В. Рожанський, Р. Рузавін, С. Яновська та інші. Роботи зазначених та інших авторів слугувати основою для нашого посібника.

В межах означеної тематики визначальним є поняття «парадигма побудови онтології логічного пізнання». Парадигма (від грец. *parádeigma* – приклад, зразок) – система форм одного слова, що відображає його видозміни з притаманними йому граматичними категоріями. У філософії науки поняття «парадигма» запровадив позитивіст Р. Бергман, вживши його для позначення нормативності методології. Вибудовуючи теорію наукових революцій, Т. Кун запропонував систему понять, серед яких важливе місце належить поняттю «парадигма» – це визнані ідеали і норми наукового дослідження, що протягом певного часу зумовлюють методи постановки наукових проблем і їх рішень. Термін «парадигма» Т. Кун використовує у двох різних значеннях. З одного боку, він позначає сукупність переконань, цінностей, технічних засобів тощо, з іншого – указує на один вид елемента в цій сукупності – конкретні рішення наукових проблем. Теоретик констатував, що у філософському контексті друга ознака цього терміна має більш глибокий зміст. Поняття «парадигма», на його думку, має властивість відкритості, зумовлює її прихильність до нових відкриттів – як окремих фактів, так і цілісних теорій. Т. Кун обґрунтовує конструктивний й деструктивний вплив відкриття на парадигму. Деструкція стосується замкнутості парадигми та полягає в руйнуванні її меж; конструктивність полягає в тому, що нове відкриття визначає нові кордони, тобто відтворює атрибут замкнутості.

Особливості логічного знання детермінують характер поняття «парадигма побудови онтології логічного знання». Логіка зазвичай є незалежною від денотата. Логічні поняття – феномени мислення. Більшість визначень об’єктів логіки – це описи їх побудови.

Логіка є однією з форм теорії пізнання. Слід зважати й на ту обставину, що філософія не передбачає метод трансляції логічних структур у власні визначення, вона не тотожна логіці. Категоріальний апарат, вироблені ідеали та норми наукового дослідження, дають змогу у філософсько-методологічному контексті аналізувати підстави онтології побудови логічного знання. З огляду на це, філософ отримує можливість аналізу вихідних посилань, на яких ґрунтується логіка.

Запропоноване нами поняття «парадигма побудови онтології логічного знання» зумовлене необхідністю філософського аналізу елементів, складових «дисциплінарної матриці» і сформованих зразків наукового дослідження в цій галузі знання. До розглянутих у дослідженні елементів «дисциплінарної матриці», що задає парадигми онтології побудови логічного пізнання, належать філософсько-світоглядні, гносеологічні, методологічні установки та критерії, які визначають вибір логічних проблем та їх рішень, що визначають базис наукового дослідження в певний період часу.

Парадигма побудови онтології логічного знання – це методологічний регулятор, що дає змогу досліджувати якісні зміни елементів «дисциплінарної матриці», які детермінують особливості постановки логічних проблем і побудови логічного знання в межах певних гносеологічних традицій.

Один з аспектів цього дослідження парадигм онтології побудови логічного знання – систематизація знань, по-перше, про вироблений у філософських концепціях зміст абстрактних категорій та ідей, що визначали трактування основоположень логіки, по-друге – про вплив природничо-наукових побудов на філософські концепції.

Об'єктом дослідження є філософсько-методологічні і природничо-наукові установки, що детермінують підстави логічних проблем і особливості побудови логічного пізнання в межах парадигм онтології побудови логічного знання.

Предмет дослідження – онтологічний статус логічних сутностей як інваріант ідеалів і норм пізнавальної діяльності досліджуваних парадигм онтології побудови логічного знання.

ГЕНЕЗИС І РОЗВИТОК ТРАДИЦІЙНОЇ ЛОГІКИ – ПЕРШОЇ ПАРАДИГМАЛЬНОЇ РЕГУЛЯТИВНОЇ УСТАНОВКИ ФОРМ МИСЛЕННЯ

1.1. ГЕНЕЗИС І СТАНОВЛЕННЯ ТРАДИЦІЙНОЇ ФОРМАЛЬНОЇ ЛОГІКИ В АНТИЧНОСТІ

1.1.1. Логічні ідеї в досократичних школах

Аналізуючи генезис і розвиток традиційної формальної логіки в європейській культурі, варто звернутись до імен Фалеса Мілетського (кінець VII – перша половина VI ст. до н.е., перший дослідник природи й математик), Зенона Елейського (народився близько 490 р. до н.е., давньогрецький філософ, представник Елейської школи, учень Парменіда), Демократа з Абдери (пр. 460/457 – пр. 360 до н.е., грецький філософ, основоположник атомістичного вчення). Систематизатором традиційної формальної логіки як науки, першої парадигмальної регулятивної установки про форми мислення слід уважати Аристотеля (384–322 рр.). Його логічне вчення мало вирішальне значення не лише в період античності, а й у середньовіччі – в епоху схоластичної філософії.

Визначаючи формальну логіку як інструмент пізнавальної діяльності, систематизоване знання про форми мислення, виділимо методи (шляхи) пізнавальної діяльності, розкриті вищезазначеними давньогрецькими мислителями.

У логіці розрізняють методи (шляхи), спрямовані на дослідження об’єктів, які застосовує суб’єкт під час пізнавальної діяльності. Серед них: аналіз, синтез, індукція, дедукція, абстрагування, конкретизація, аналогія, моделювання, побудова гіпотез.

Визначимо сутність методів пізнавальної діяльності.

Аналіз (від грец. *analysis* – розкладання, розчленування) – уявний розділ досліджуваного об’єкта як цілісності на складові частини, кожна з яких стає окремим предметом пізнання з метою виявлення властивостей нових об’єктів і відносин між ними.

Синтез (від грец. *synthesis* – поєднання, складення) – уявне поєднання частин, виокремлених під час аналізу об'єкта, встановлення взаємодії і необхідних зв'язків між частинами цілого, що свідчить про його нерозривний зв'язок з аналізом.

Індукція (лат. *induction* – наведення, спонукання) – процес руху думки від часткового до загального, від низки факторів до закону. Індуктивний метод використовується в разі, коли на основі часткового факту можна зробити висновок, встановити взаємозв'язок між окремими явищами та певним законом.

Дедукція (від лат. *deduction* – виведення) – процес руху думки від загального факту до одиничного, від закону до окремих його проявів.

Абстрагування (лат. *abstain* – віддалення, відволікання) – здатність абстрагуватися від усієї сукупності факторів і зосередити увагу на якомусь одному питанні.

Конкретизація – це застосування теоретичних знань стосовно конкретної ситуації для того, щоб уточнити, поглибити її розуміння. Конкретне поняття є своєрідною сукупністю різних абстракцій, або абстрактних понять, що відображають певні властивості, сторони та зв'язки певного предмета. Конкретні поняття утворюються внаслідок послідовного доповнення й уточнення, розширення та синтезу окремих абстракцій, що відображають різні аспекти конкретних елементів.

Аналогія (від грец. *analogia* – відповідність) – прийом, у якому з огляду на подібність двох явищ в одних умовах робиться висновок про схожість цих явищ в інших умовах. Аналогія – форма отримання вивідного знання – умовивід, у якому на підставі подібності предметів в одних ознаках робиться висновок про схожість цих предметів і в інших ознаках. Метод аналогії широко використовується в моделюванні, оскільки модель – аналог об'єкта, що вивчається за допомогою моделювання. Аналогія передбачає отримання нового знання про досліджуваний предмет (явище) на основі раніше набутих знань про інший багато в чому подібний, схожий, але по суті інший об'єкт.

Моделювання (лат. *modus* – міра, образ, зразок) – штучно створений об'єкт, що представлений у вигляді схеми, креслення, формули, фізичних конструкцій. Модель застосовується для дослідження об'єкта, який реально існує.

Гіпотеза (від грец. *hynothesis* – припущення) – припущення, що висувається з метою, по-перше, пояснення причин існування явищ, процесів, їх походження; по-друге, пояснення зв'язків і відносин між предметами, явищами, процесами, подіями; по-третє, прогнозування подальшого розвитку різних систем, одержання нового знання про них.

У давньогрецькій науці логічні методи застосовували ще

задовго до їх систематизації Аристотелем. Так, іонійський філософ – дослідник природи, математик Фалес Мілетський застосовував у своїй діяльності методи аналізу, синтезу, індукції, дедукції, абстрагування, моделювання, побудови гіпотез. Водночас він не ставив за мету дослідження наукової методології, тим більше не прагнув до їх чіткого визначення.

Фалес математику використовував як спосіб теоретичного осмислення дійсності, абстрагування від природи речей, процесів і явищ під час їх опису, як область знання, що має власні методи опису. Предметами математичного опису в мислителя були процеси та явища дійсності. Математика для Фалеса – спосіб теоретичного моделювання природи для одержання нового знання про неї.

Фалесу Мілетському було приписано такі прозові твори: «Про початки», «Про сонцестояння», «Про рівнодення», «Морська астрологія». Назви праць дають змогу вважати автора вченим і філософом, який шукав фізичний початок світобудови. На жаль, від цих праць до нас дійшли лише їх назви.

Моделюючи дійсність і абстрагуючись від неї, Фалес уперше в Іонії передбачив рік повного сонячного затемнення, що відбулося 28 травня 585 р. до н.е.

Представники пізньої античної традиції були одностайні в тому, що всі свої початкові наукові та філософські знання Фалес запозичив з Азії та Африки – Вавилонії, Фінікії, Єгипті. Прокл стверджував, що Фалес приніс в Елладу з Єгипту геометрію. Ямвлих зазначав, що свою мудрість Фалес Мілетський запозичив у жерців Мемфіса й Диополіса. Згідно з Аецієм, мислитель займався філософією вже в Єгипті.

Фалесу Мілетському приписували відкриття річного руху Сонця на тлі «нерухомих» зірок, визначення часу сонцестоянь і рівнодень, розуміння того, що Місяць світить не своїм світлом.

Застосовуючи методи аналізу й синтезу, Фалес розділив небесну сферу на п'ять зон. Він запровадив календар, визначивши тривалість року в 365 днів, розділивши його на 12 тридцятиденних місяців, з огляду на що п'ять днів випадали з місяців і їх було переміщено на початок року так, як це було прийнято в тогочасному Єгипті.

Фалес, використовуючи індуктивний метод та метод моделювання у сфері геометрії (Гея – у давньогрецькій міфології – Богиня-Земля. Відповідно, давньогрецька геометрія – наука про землевимір, а також вимір у просторі), визначив низку рівностей. Це рівності вертикальних кутів, трикутників з рівною стороною і рівними прилеглими до неї кутами, кутів при основі рівнобедреного трикутника, розділених частин діаметром кола. Використовуючи метод аналізу й синтезу, Фалес вписав у коло прямокутний трикутник. Ученим жерцям Вавілонії та Єгипту це було відомо, але для Еллади стало відкриттям. Водночас принципово нове полягало в тому, що Фалес почав викладати математику не лише в емпіричній, а й в абстрактній формі.

Щоб сповна проаналізувати геометричні відкриття Фалеса, необхідно звернути увагу також на низку положень, без яких винахід зазначених тверджень є неможливим. Йдеться, зокрема, про паралельні лінії, рівносторонні, рівнобедрені та різнобічні трикутники, паралелограми. Грецькі письменники приписують йому також розв'язання двох геометричних задач практичного характеру. Одна з них полягала у визначенні відстані на морі корабля від Мілетської гавані, а інша – у визначенні висоти піраміди за довжиною її тіні (вимірюючи тінь у той час, коли вона дорівнює своєму тілу). Поставивши палицю на кінці тіні піраміди так, що від сонячного світла утворилися два трикутники, він показав, що відношення між величиною піраміди та палиці таке ж, яке було між тінню піраміди й тінню палиці. Отже, без використання індуктивного методу, методів аналізу та синтезу побудова Фалесом зазначених абстрактних моделей дійсності була б неможливою.

Напрям суворої логічної послідовності в геометрії першими запровадили геометри грецької іонійської школи, засновником якої був Фалес. Він створив Іонійську школу, представники якої, використовуючи абстрактні математичні міркування та моделювання, почали доводити теореми, що стосувалися світу дійсних речей, процесів і явищ. Математика Фалеса збирала розрізнені наукові знання, будувала науку у вигляді логічного ланцюжка, була методологією, найбільш теоретичною наукою того часу.

У Аристотелівській «Метафізиці» йдеться: «Серед перших філософів більшість уважала початком всіх речей одні лише засади у вигляді матерії, тобто те, з чого складаються всі речі, з чого вони виникають і на що зрештою перетворюються… І тому вони переконані, що ніщо не виникає та не гине, оскільки подібна основна природа завжди зберігається... Форми такого першоджерела у всіх дослідників різняться, проте Фалес як родоначальник такої філософії вважає її водою»[1].

Вода Фалеса – філософське переосмислення за допомогою методів індукції, аналізу, синтезу, абстрагування, висунення гіпотези

[1] Аристотель. Метафизика / Аристотель. Собр. соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1976. – 550 с. 983b10-20

гомерівського Океану, шумеро-аккадського Абзу (Алсу). Назва його праці «Про початки» доводить, що Фалес прагнув осягнути поняття першооснови. Усвідомлюючи воду як начало, він примушує плавати на ній землю – у цій формі він і представляє субстанціальність води, що буквально перебуває під усім, на ній усе плаває. Отже, мислитель стихійно застосовує зазначені логічні методи, що ведуть його філософію від міфу до логосу – вчення.

Розкриваючи витоки логіки як фундаментального знання про форми мислення, інструмента дослідника в пізнавальній діяльності, слід ураховувати вчення Зенона Елейського.

Платон та Аристотель називають його винахідником діалектики. Доводячи положення свого вчення про простір і рух, філософ стихійно опанував не лише діалектику – мистецтво вести діалог, переконувати співрозмовника в діалозі, а й мистецтво аргументації. Однак перш ніж звернутися до сутності вчення Зенона, визначимо сутність **таких логічних мистецтв, як мистецтво аргументації та діалектики.**

Аргументація – це логічний процес міркувань, за якого обґрунтовується істинність судження (тези доказу) за допомогою інших міркувань – доводів (аргументів). Це така інтелектуально-мовленнєва процедура, що передбачає покуш і пред'явлення підстав для певної точки зору з метою її розуміння і (або) прийняття. Аргументація – це процес пошуку опори висунутого положення в інших положеннях і вираження цих положень у певній формі. Найчастіше аргументація – правдоподібне міркування, у багатьох випадках – фальсифікація істинності в процесі доведення власної позиції.

Потреба в аргументації виникає на заключному етапі розгляду певного питання, після того, як сформульовано можливі відповіді, але є незрозумілим, яка з них більш доречна й адекватна. Вона має на меті переконання протилежної сторони в істинності висунутого положення.

З огляду на те, що аргументація є мовленнєвою дією на основі системи тверджень для виправдання або спростування якоїсь думки, вона характеризується такими ознаками:

- завжди виражена в мові, тобто набуває форми висловлених чи написаних заяв;
- є цілеспрямованою діяльністю щодо посилення або ослаблення будь-яких (або чиїхось) переконань;
- передбачає розумність тих, хто її сприймає, їх здатність раціонально приймати або оскаржувати доводи.

У межах аргументації міркуванням притаманні дві властивості:

доказовість і переконливість. У процесі аргументації виділяють такі елементи: теза, аргументи, демонстрація.

Аргументація є процесом упорядкування джерел, аргументів у певну систему для обґрунтування якоїсь думки. Водночас поняття «аргументація» та «доказ» не тотожні.

Доведення – це обґрунтування істинності якої-небудь тези аргументами, достовірність яких не викликає сумніву. Воно здійснюється згідно з правилами виводу.

В аргументації достатньо навести підстави для схиляння до своєї думки. Тут не обов'язково дотримуватися правил виводу – вимоги істинності висловлюваних доводів. Вони повинні бути лише правдоподібними. Тому кожен доказ автоматично є аргументацією, але не будь-яка аргументація може сприйматися за доказ. Лише між бездоганною аргументацією та доказом можна поставити знак рівності.

Таким чином, аргументація – це недосконалий доказ, неповний, але водночас цілком надійний. Мета аргументації полягає в тому, щоб не допустити голослівності, переконати опонента прийняти певну точку зору, домогтися його згоди.

За структурою аргументація й доказ аналогічні: вони мають однакові схеми побудови міркувань та елементи (теза – те, що обґрунтовується, аргументи й демонстрація – це зв'язок аргументів між собою і тезою). Різниця полягає в ступені категоричності мети. В аргументації – це переконання, що є удаваним, передбачуваним, таким, що сприймається на віру, а докази – незаперечна істина. Отже, суттєвою ознакою відмінності між аргументом і доказом є те, що дотримання істини в першому – бажана, у другому – неодмінна умова.

Завжди потрібно прагнути до більшого ступеня достовірності, а межею аргументації вважати істинність.

Змістом аргументації будь-якої тези (твердження) є аргументи, що подаються як конкретні думки, поняття, судження, висловлювання.

Здійснюючи класифікацію аргументацій залежно від специфіки тез, які обстоюють, можна виділити:

- односторонню (передбачає захист однієї сторони);
- двостороння (контрастне зіставлення точок зору, створюється умова вибору з альтернатив);
- контраргументація (доводи спростовують, що нищить аргументи після доводів (антитези) противника).

Найбільш «надійними» видами аргументації є докази та спростування. Доказ тлумачать як процедуру встановлення істинності певного твердження шляхом доведення інших тверджень, істинність яких уже відома і з яких за необхідністю випливає перше. Спростування – це міркування, спрямоване проти висунутої тези й має на меті встановлення його хибності або недоведеності.

Діалектика (від давньогрец. *Διαλεκτική* – мистецтво сперечатися, вести міркування) – метод аргументації у філософії, а також форма та спосіб теоретичного мислення, предметом якого є суперечності змісту цього мислення. У межах діалектичного матеріалізму діалектику визначають як загальну теорію розвитку матеріального світу та водночас теорію та логіку пізнання.

Діалектичний метод є одним із ключових у європейській філософській традиції. Власне слово «діалектика» походить із давньогрецької філософії і стало відомим завдяки «Діалогам» Платона, у яких два чи більше учасників діалогу могли дотримуватися різних думок, але прагнули відшукати істину шляхом обміну думками. Починаючи з напрацювань Г. В. Ф. Гегеля, діалектика протиставляється метафізиці – такому способу мислення, що розглядає речі та явища як незмінні й незалежні один від одного.

В історії філософії найвизначніші мислителі визначали діалектику як:

- вчення про вічне становлення та мінливість буття (Геракліт);
- мистецтво діалогу, що передбачає осягнення істини шляхом постановки навідних питань і методичних відповідей на них (Сократ);
- метод розчленування та синтезу понять із метою осягнення надпочуттєвої (ідеальної) сутності речей (Платон);
- наука, яка стосується загальних положень наукового дослідження, або ж, що є аналогічним, – загальних місць (Аристотель);
- вчення про поєднання протилежностей (Микола Кузанський, Джордано Бруно);
- спосіб руйнування ілюзій людського розуму, який, прагнучи до цілісного й абсолютного знання, неминуче заплутується в суперечностях (І. Кант);
- загальний метод пізнання суперечностей, як внутрішніх рушійних сил розвитку буття, духу й історії (Г. В. Ф. Гегель);
- вчення і метод, що сприймаються як основа пізнання дійсності та її революційного перетворення (марксизм).

Філософи ранньої грецької класики говорили про всезагальний і постійний рух. Водночас, представляючи космос у вигляді завершеного й прекрасного цілого, у вигляді вічного та перебуває в спокої. Геракліт й інші грецькі мислителі розробили формули вічного становлення, руху як єдності протилежностей. Аристотель уважає винахідником діалектики Зенона Елейського, який піддав аналізу суперечності, що виникають у разі спроби осмислити поняття руху та множини. На основі філософії Геракліта й елеатів надалі виникла суто негативна діалектика в софістів, суперечливих речей, а також понять. У цьому мислителі вбачали відносність людського знання та доводили діалектику до крайнього скептицизму, не виключаючи й моралі.

Платон слідом за еліатіами (Елейська школа) визначає істинне буття як тотожне й незмінне. Тим не менш, у діалогах «Софіст» і «Парменід» він обґрунтовує діалектичні висновки про те, що вищі роди справжнього можуть мислитися лише таким чином, що кожен із них є і не є, дорівнює собі самому та неоднаковий, тотожний собі й переходить у своє інше. Тому буття містить у собі суперечність: воно єдине та множинне, вічне й минуще, незмінне та мінливе, спочиває і рухається. Суперечність є необхідною умовою для спонукання душі до міркувань. У Платона дається діалектика п'яти основних категорій: руху, спокою, відмінності, тотожності й буття, унаслідок чого буття філософ трактує як таке, що суперечить саме собі, як координована роздільність.

У діалозі «Софіст» Платон викладає вчення про роди справжнього. Аналізуючи співвідношення понять буття, руху і спокою, Платон розмірковує про несумісність спокою з рухом. Оскільки і рух, і спокій існують, то, відповідно, буття сумісне з тим і з іншим. Таким чином, є три роди: буття, спокій, рух.

Кожен із цих трьох родів є іншим відносно решти двох родів і тотожне самому собі. З огляду на це, виникає питання про співвідношення родів тотожного й іншого з родами спокою та руху: збігаються вони між собою чи різняться?

Оскільки і спокій, і рух як тотожні кожен собі причетні тотожному, і при цьому вони різняться між собою, то ні спокій, ні рух не збігаються з тотожним. Оскільки і спокій, і рух як інші відносно останніх родів причетні до іншого та при цьому різняться між собою, то ні спокій, ні рух не збігаються з іншим. Таким чином, спокій і рух відмінні від тотожного й іншого.

Оскільки з існуючого одне існує саме по собі, а інше – лише відносно чогось, то інше не збігається з буттям, що передбачає як безумовне (те, що існує саме по собі), так і відносне.

Аристотель відрізняє «діалектику» від «аналітики» як науку про ймовірні думки від науки про докази. Аристотель у вченні про чотири причини – матеріальну, формальну, рушійну та цільову стверджував, що всі чотири причини існують у кожній речі абсолютно невиразне й тотожне з власне річчю.

Звернемося до сутності вчення Зенона Елейського, розглянувши застосування ним під час обґрунтування положень свого вчення про буття мистецтв діалектики й аргумента.

Зенон Елейський – учень Парменіда. Згідно з описом Платона в діалозі «Парменід», Парменід «був уже досить старий... віком близько шістдесяти п'яти. Зенону ж тоді було близько сорока»[2]. Їх співрозмовником є молодий Сократ, імовірно, не молодший двадцяти років, – звідси зазначено датування. У Платона Зенон зображений як автор збірки аргументів, який він склав «у молоді роки»[3] для захисту вчення Парменіда.

Аргументи Зенона прославили його як вправного полеміста в дусі модної для Греції середини V століття до н.е. софістики. Зміст його вчення вважався тотожним позиції Парменіда, єдиним «учнем» якого він традиційно вважався (послідовником Парменіда називали також Емпедокла). Аристотель називав Зенона основоположником **діалектики,** використовуючи термін **«діалектика»** в значенні мистецтва доказування.

Платон у «Парменіді» згадує про твір Зенона, написаний із метою висміювання опонентів Парменіда, аргументування, що передбачення безлічі та руху призводить до ще більш смішних висновків, ніж передбачення єдиного буття. Аргументація Зенона відома в переказі більш пізніх авторів: Аристотеля («Фізика») і його коментаторів (насамперед у Сімплікія). Головний (або єдиний) твір Зенона становив собою набір аргументів, логічна форма яких зводилася до доказування суперечностей. Обстоюючи елейський постулат про єдине нерухоме буття, він прагнув показати, що прийняття протилежної тези (про множинність і рух) призводить до абсурду (ἄτοπον) і тому має бути відкинуте. Очевидно, Зенон ґрунтував свою позицію на законі «виключення третього»: якщо з двох протилежних тверджень одне неправильне, то правильне інше. Відомо дві основні групи аргументів Зенона: проти множинності й проти руху. Є також свідчення щодо аргументування проти місця та чуттєвого сприйняття, що можна розглядати в контексті розвитку аргументації проти множинності.

Аргументи (λόγοι) Зенона проти множинності збереглись у Сімплікія, який цитує Зенона в коментарі до «Фізики» Аристотеля, а також у Платона («Парменід»).

[2] Платон. Парменид / Платон. Соч. в 3-х т. Т.2. – М. : Мысль, 1968. – 626 с. 127b

[3] Платон. Парменид / Платон. Соч. в 3-х т. Т.2. – М. : Мысль, 1968. – 626 с. 128d6-7

1. Теза: якщо є множинність, то речі мають бути малі й великі (ті, що взагалі не мають величини, – малі, а такі, що є нескінченними, – великі). **Доказ:** існуюче повинно мати певну величину; будучи до чогось доданим, воно збільшить його, а будучи від чогось відібране – зменшить. Водночас, щоб відрізнятися від іншого, потрібно від нього дистанціюватися. Отже, між двома існуючими завжди буде неявне щось третє, завдяки якому вони різняться. Таке третє існуюче також має відрізнятися від іншого. Загалом існуюче виявиться нескінченно великим, становлячи сукупність нескінченної множинності речей.

2. Теза: якщо є множинність, то речі мають бути обмежені та безмежні. **Доказ:** якщо множинність речей існує настільки, наскільки є, не більше й не менше, то їх кількість обмежена. Але якщо є множинність, між речами завжди будуть існувати інші, між ними – треті, і так до нескінченності. Отже, їх кількість буде нескінченною. Оскільки доведено одночасно протилежне, неправильний вихідний постулат, то безлічі немає.

Згідно з теорією Платона, в одному з аргументів Зенона доведено: «Якщо є безліч, то речі мають бути одночасно подібними й неподібними, а це неможливо»[4]. Аргумент передбачає розгляд однієї і тієї самої речі як подібної самій собі та неподобної іншим (відмінної від інших). У Платона аргумент постає як паралогізм, оскільки подібність і неподібність беруться до уваги в різних аспектах, а не в одному.

Аргумент проти місця. Якщо є місце, то воно буде в чомусь, оскільки всяке суще перебуває в чомусь. Те, що в чомусь, відповідно, у місці. Отже, і місце буде в місці, і так до нескінченності. Отже, місця немає. Аристотель та його коментатори вважали цей аргумент одним із паралогізмів: неправильно, що «бути» – значить «бути на місці», адже безтілесні поняття не існують у якомусь місці.

Аргумент проти чуттєвого сприйняття («Просяне зерно»). Якщо під час падіння одне зерно або одна тисячна його частина не шумлять, то як може шуміти падіння медимна зерна? Якщо спричиняє шум падіння медимна зерна, то й падіння однієї його тисячної має супроводжуватися шумом, чого насправді немає. Аргумент стосується проблеми порогу чуттєвого сприйняття, хоча сформульований у межах термінів теорії частини й цілого: як ціле співвідноситься із частиною, так і вироблений цілим шум повинен співвідноситися із шумом, виробленим частиною. У такому формулюванні паралогізм полягає в

[4] Платон. Парменид / Платон. Соч. в 3-х т. Т. 2. – М. : Мысль, 1968. – 626 с. – С. 127.

тому, що йдеться про «шум, вироблений частиною», якого насправді немає (за словами Аристотеля, існує лише можливість).

Аргументи проти руху. Найбільшої популярності набули чотири аргументи проти руху та часу, відомі з «Фізики» Аристотеля та коментарів до «Фізики» Сімплікія й Іоанна Філопона. Перші дві апорії ґрунтуються на тому, що будь-який відрізок довжини може бути представлений у вигляді нескінченної кількості неподільних частин («відрізків»), які зрештою не можуть бути подолані; третя й четверта – на тому, що і час складається з неподільних частин («тепер»).

1. «Стадій» (інша назва – «Дихотомія»). Рухоме тіло, перш ніж подолати певну відстань, повинно спочатку пройти її половину, а перш ніж досягти половини, йому необхідно пройти половину половини. Такий поділ є нескінченним, адже будь-який відрізок, яким би малим він не був, можна ділити навпіл.

Іншими словами, оскільки рух завжди відбувається в просторі, а просторовий континуум розглядається як актуально надана безліч відрізків, адже кожна неперервна величина може бути ділена до нескінченності, то рухомому тілу зрештою доведеться минути нескінченну кількість відрізків, що унеможливлює рух.

2. «Ахілл». Найспритніший бігун ніколи не наздожене найбільш повільного, оскільки необхідно, щоб той, хто наздоганяє, першим досяг місця, звідки почав рухатися той, хто тікає. Тому найменш вправний бігун за потреби завжди повинен бути трохи попереду.

Насправді рухатися – значить переходити з одного місця на інше. Швидкий Ахілл з точки **А** починає переслідувати черепаху, що перебуває в точці **В.** Йому необхідно спочатку пройти половину цього шляху – відстань **АА1.** Коли він опиниться в точці **А1,** черепаха за той час, поки він біг, пройде трохи далі на деякийсь відрізок **ВВ1.** Тоді Ахіллу, що перебуває на середині шляху, потрібно дістатися точки **В1,** для чого, відповідно, необхідно пройти половину відстані **А1В1.** Коли ж він виявиться на півдорозі до цієї мети, черепаха відповзе ще трохи далі, і так до нескінченності. В обох апоріях Зенон передбачає континуум, що ділиться до нескінченності, мислячи цю нескінченність як актуально існуючу.

3. «Стріла». Стріла, що летить, насправді нерухома. **Доказ:** у кожен момент часу стріла займає певне місце, рівне своєму обсягу (бо в іншому разі стріла була б «ніде»). Але займати рівне собі місце – це значить перебувати в стані спокою. Звідси випливає, що рух можна вважати лише сукупністю станів спокою, що є неможливим, адже з нічого не буває нічого.

4. «Рухомі тіла» (інша назва – «Стадій»). Якщо рух існує, то одна з двох рівних величин, що рухаються з однаковою швидкістю, одночасно пройде вдвічі більшу, рівну, відстань, ніж інша.

Традиційно цю апорію пояснювали за допомогою креслення. Два обнакові предмети (позначені буквеними символами) рухаються назустріч один одному паралельними прямими та проходять повз третього предмета, рівного їм за величиною. Рухаючись з однаковою швидкістю, один раз повз той предмет, хто рухається, а інший – повз той, що нерухомий, одна й та сама відстань буде пройдена одночасно і за певний проміжок часу **t,** і за його половину – **t/2.** Нехай ряд **A1, A2, A3, A4** означає нерухомий предмет, ряд **B1, B2, B3, B2**, – предмет, що рухається вправо, і **C1 C2 C3 C4** – предмет, що рухається вліво: **A1, A2, A3, A4, B1, B2, B3, B4, C3, C2, C3, C4.**

Після закінчення одного і того самого моменту часу **t** точка **B4** проходить половину відрізка **A1–A4** (половину нерухомого предмета) і цілий відрізок **C1–C4** (предмет, що рухається назустріч). Так, кожному неподільному часовому проміжку відповідає неподільний відрізок простору. Але виявляється, що точка **B4** в один момент часу **t** проходить (залежно від того, звідки вести відлік) різні частини простору: відносно нерухомого предмета вона проходить менший шлях (дві неподільні частини), а відносно рухомого – більший (чотири неподільні частини). Утворений неподільний момент часу виявляється вдвічі більшим за себе. А це означає, що або він повинен бути діленим, або подільною повинна бути неподільна частина простору. Оскільки ні того, ні іншого Зенон не визнає, він робить висновок, що рух неможливо осмислити без суперечності, а отже, руху не існує.

Загальний висновок зі сформульованих Зеноном апорій у межах підтримки вчення Парменіда полягав у тому, що свідчення відчуттів, що переконують нас в існуванні множинності й руху, різняться з аргументами розуму, які не містять у собі суперечностей, отже, істинні. У цьому разі помилковими повинні вважатися почуття й міркування, що ґрунтуються на них.

Побутувала точка зору, згідно з якою аргументи Зенона були спрямовані проти прихильників піфагорійського «математичного атомізму», конструювали фізичні тіла з геометричних точок і брали атомарну структуру часу. В античній традиції вважалося достатнім поясненням (у межах вчення Платона) припущення, що Зенон підтримував позицію Парменіда, а його опонентами були всі, хто не брав елейську онтологію та дотримувався здорового глузду, довіряючи почуттям.

Аналізуючи досократичний період, у контексті неусвідомленого використання законів логіки неможливо не згадати ім'я **Демокріта.** Філософ у своїй пізнавальній діяльності використав аналіз і синтез, індукцію (процес руху думки від часткового до загального, від низки чинників до закону) та дедукцію (процес руху думки від загального факту до факту одиничного, від закону до окремих його проявів). Крім того, він постійно висував гіпотези стосовно формування моделі картини світу. З огляду на зазначене, спробуємо продемонструвати основні складові вчення Демокріта.

Учення про засади – онтологія та гносеологія Демокріта ґрунтуються на методах аналізу, синтезу та висунення гіпотез. Атоми й порожнеча – універсальні першооснови та головна антитеза плюралістичної онтології Демокріта. Атом (ἡ ἄτομος οὐσία, «неподільний») – найменше тіло, що є неподільним з тієї самої причини, що й неподільне «буття» Парменіда. Ділення передбачає наявність порожнечі, проте всередині атома її немає. Як і буття в Парменіда, атоми Демокріта є вічними та незмінними.

Запровадження поняття атома традиційно розуміють як реакцію на проблему поділу до нескінченності, яку досліджував Зенон Елейський. Якби атомів не було, процес ділення будь-якого тіла був би нескінченний, і ми отримали б одну кінцеву річ, що складається з нескінченної кількості частин, що є абсурдним. Порожнеча (κενόν) в системі Демокріта є принципом дискретності, множини й руху атомів, а також їх «вмістилищем». Називаючи порожнечу «небуттям», філософ явно відмовився від елейської постулату про неіснування небуття. Однак поняття буття й небуття включені в нього в більш загальне поняття «те, що насправді» (ἐτεῇ), завдяки якому реальність визнавалася і за порожнечею (не-буттям). Атом перебуває серед низки компонентів: буття, щось, тіло, повнота. Таким чином, експлікація семантичного ряду поняття «атом» така: бути – значить бути чимось. Бути чимось – означає бути тілом, бути тілом – це бути повним (щільним). Порожнеча співвіднесена з поняттями «небуття», «ніщо» (οὐδέν, «нуль»), «нескінченність». Атоми та порожнеча є рівноправними: «щось» не більше, ніж «ніщо». Цей принцип є універсальним у системі Демокріта. Усі атоми, кількість яких є нескінченною, постійно рухаються, навіть усередині твердих тіл вони здійснюють коливальні рухи («трясуться в усі боки»). Першопричиною цього руху є зіткнення атомів, що почалися в вихровому космогенезі. Космос Демокріта повністю механістично детермінований.

Один від одного однаково щільні атоми відрізняються трьома властивостями: «фігурою» (ῥυσμός), «розміром» і «поворотом» (розміщенням у просторі), унаслідок чого складені з атомів тіла мають різноманітні якості. Фігури (форми) атомів нескінченно різноманітні. Згідно з принципом повноти, немає підстав надавати переваги одній певній формі, обмежуючи таким чином інші форми атомів. При цьому всі міркування про форми атомів повністю умоглядні, бо атом, як такої не доступний чуттєвого сприйняття. Сам Демокріт називав свої атоми ἰδέαι («види», «форми»), ввівши цей термін ще до Платона для позначення суті, вбачаємо лише думкою.

Згідно із законом збереження буття («нічого з нічого не виникає»), виникнення та знищення складних тіл відбувається шляхом поєднання та роз'єднання атомів. Чотири елементи фізичного світу – вогонь, повітря, вода і земля – складаються з атомів. Лише атомам вогню Демокріт приписував певну форму – кулясту (куля – найбільш рухлива з усіх фігур). Про решту трьох елементів відомо, що вони однакової форми, але величина різна: найбільшими є атоми землі, найменшими – повітря. Зазначені три елементи є сумішшю атомів усіх форм, з огляду на що вони можуть взаємоперетворюватися: шляхом виділення більших атомів вода може перетворитися на повітря, або земля – на воду.

Відповідно до ключових положень **космології Демокріта,** нескінченні за кількістю атоми безперервно рухаються в нескінченній порожнечі, зіштовхуючись між собою та зчіплюючись завдяки нерівностям власних форм. «Переплітаючись», вони утворюють незліченні світи (космоси). Наш космос утворився завдяки якомусь спонтанному «вихру» (Δίνη), викликаному величезним збігом атомів, що прорвались у «велику порожнечу». Унаслідок цього вихрового руху, що був результатом неоднорідного розподілу атомів у порожнечі, відбулося їх первинне сортування (поєднання схожих між собою атомів із розміщенням у центрі найбільших серед них), зрештою утворилася Земля. Навколо неї спочатку оберталася вогка оболонка, схожа на бруд, що поступово висихала. Волога матерія осідала донизу, а суха від тертя запалала, утворивши таким чином зірки. Земля перебуває в центрі космосу. Вона залишається нерухомою (не рухається, а «лише здригається»), а небосхил – повітря, обертається навколо Землі та не дає їй падати, хоча сама вона важча за повітря. Форма її в поперечині округла, проте випукла посередині, а довжина в півтора раза більша за ширину. Ближче до Землі розташований Місяць, найдалі – Сонце, усі інші планети – між ними, на крайній периферії розташовані зірки. Обертаючись, Сонце та зірки витрачають свою матерію, водночас збагачуючись зовнішнім впливом, що називається «живленням від випарів». Космос існує, доки є здатним єднатися з матерією ззовні, в іншому разі починається його розпад. На думку Демокріта, Сонце та Місяць виникли окремо від нашого космосу під час незавершених космогонічних процесів, а потім увійшли до нашого космосу, де розжарилися та набули нинішнього вогняного стану. Місяць світить відбитим світлом («живиться від Сонця»), але має також і власне світіння кольору розпеченого вугілля, що видно під час місячних затемнень. Особливу увагу Демокріт приділяв поясненню появи комет, яскравості Чумацького Шляху.

Згідно з **антропологією Демокріта,** тварини походять безпосередньо від землі. Від теплоти поверхня напіврідкої землі здулася, утворилися гнильні бульбашки, схожі на болотні, усередині яких зародилося життя. Уночі зародки харчувалися інеєм, що випадав із навколишнього повітря, а вдень – тверднули від спеки. Коли розміри цих горбів помітно збільшилися – на світ з’явилися різні види тварин. Ті, у кого було найбільше тепла, піднеслися догори та стали літаючими; у кому переважала земля – стали плазунами та іншими сухопутними тваринами, а в кому домінувала вода – водоплавними. З часом сонячний жар висушив життєтворні бульбашки, а інші тварини згодом утворилися шляхом породження один від одного. Про виникнення статей Демокріт обґрунтував таку ідею: якщо в земному міхурі особина встигала повністю дозріти («спектися»), то виходив самець, більш вогненний і активний за природою, а якщо ні – виходила самка.

Згідно зі свідченнями Аристотеля («Історія тварин», «Про виникнення тварин»), Демокріт систематично спостерігав за живою природою в її різноманітті. Він шукав причину всіх явищ: звідки в павуків павутина, чому в оленів і биків ростуть роги, чому мули є безплідними та яка природа виникнення каліцтв? Окрему увагу Демокріт приділив дослідженню різних етапів процесу народження – від зачаття й внутрішньоутробного розвитку плода до особливостей пологів залежно від кліматичних умов місцевості.

Традиційно, як і всі досократики, Демокріт розглядав антропологію як частину космології та натурфілософії. Філософ висловив думку про еволюцію інстинкту самозбереження, що, на відміну від диких звірів, пов’язана з досягненнями культури. Згідно з

Демокрітом, люди створили культуру (у тому числі землеробство, різні ремесла, музичне мистецтво), наслідуючи природу та навички різних тварин. Вони з часом училися на власному досвіді обирати й зберігати корисне для життя. Імовірно, інтерес до історії культури спонукав Демокріта здійснити власний розрахунок Троянської ери – року взяття греками Трої. Описані в епосі Гомера події вважалися найбільш ранніми в історії. На їх основі було зроблено висновок про тривалість існування власне людства. Розрахунки Демокріта показали період близько 1150 р. до н.е.

Приділяючи особливу увагу вивченню різних аспектів життя людини та людства, у межах **вчення про душу та пізнання Демокріт** не відчував потреби визначити поняття людини, що цілком відповідало духу тогочасної філософії. Доксографи зберегли лише логічно невигадливе тлумачення: «Людина – те, що всім відомо». Водночас Демокріт уперше детально розробив теорію чуттєвого пізнання та одним із перших констатував залежність властивостей і якостей речей від способу їх сприйняття, під час якого змінюється якщо не сам пізнаваний предмет, то принаймні його образ. Згідно з Демокрітом, усі поняття, складові мови нашого опису зовнішнього світу, не відповідають істині, тому все наше пізнання конвенціональне (νόμος – угода, узаконений звичай): за звичаєм солодкість, за звичаєм гіркота, за звичаєм холод, колір, тепло, насправді ж – атоми й порожнеча.

В аналогічному значенні слово νόμος («звичай») до Демокріта використовував Емпедокл, кажучи про умовність таких звичних слів, як «народження» і «загибель», у той час як першоелементи насправді вічні.

Відповідно до вчення Демокріта, якщо в атомів немає якостей (кольору, запаху, смаку), то і речі не наділені якостями: «нічого з нічого не виникає». У такому разі його твердження схоже на аргументацію Анаксагора, лише з прямо протилежними висновками.

Чуттєве сприйняття Демокріт пояснював за допомогою «закінчення» від тіл. Від поверхні тіл у різні боки відлітає матеріальна плівка, що зберігає форму сприйманого тіла: вона потрапляє в око, потім в душу, у якій відображається. Так виникають наші уявлення. Усі почуттєві якості, на думку Демокріта, є результатом впливу атомів на орган сприйняття. Водночас враження формується, з одного боку, завдяки формально кількісним відмінностям атомів, їх поєднаннями та характером пустот, що розподіляють атоми всередині тіл, а з іншого – завдяки будові органу чуття. Пояснення філософа зорових і смакових сприйнять можна відновити з твору Теофраста «Про відчуття і відчувається».

Простими кольорами Демокріт визнавав чотири: білий, чорний, червоний і зелений. Частинки, що створюють враження білого кольору, є гладкими, а чорного – шорсткими, нерівними та різної форми. Червоний колір пов'язаний із круглими частинками, що схожі на тепло, проте більші за розміром. Зеленуватий колір складається з твердого й порожнього, його відтінки змінюються залежно від «положення» та «порядку» атомів. Інші кольори утворюються шляхом змішування з чотирьох основних, проникаючи та взаємно заповнюючи в різній пропорції пори фарбувальних речовин.

Пояснюючи смакові відчуття, Демокріт також приписував кожному смакові (солоному, солодкому, гострому, кислому, гіркому, їдкому) свої частки, але водночас зазначав, що жодна з форм не зустрічається в чистому вигляді, проте, будучи змішаною з іншими, і лише за умов переважання якоїсь форми, дає найменування тій чи іншій якості. Відмінності в сприйнятті різних осіб (те, що є солодким для більшості, може бути для когось гірким) пояснювали як мінливістю предмета (один і той самий атом, «повернувшись», може сприйматися і як кислий, і як солодкий), так і мінливістю суб'єкта, відмінністю в побудові органу чуття, що дає змогу проникати зовні більшій кількості атомів однієї форми, ніж іншої, визначаючи таким чином остаточне сприйняття як солодке або гірке.

Відносність усвідомлення важливості чуттєвого пізнання зумовив виникнення скептицизму в теорії пізнання. Секст Емпірик зближав Демокріта зі скептичною традицією. Низка його висловлювань підтримують цю думку: «людина віддалена від істинної дійсності»; «нічого ми насправді не знаємо, але в кожного формується власна мінлива думка (ἐπιρρυσμίη δόξις)»; «усвідомлення того, якими насправді є речі, пов'язане зі значними труднощами»; «істина – у глибині».

Питання про природу душі, знання та пізнання здібностей Демокріт розглядав у контексті, заданому його попередниками та сучасниками: Емпедоклом, Протагором, Анаксагором. Не відступаючи ні від атомізму, ні від принципу «подібне пізнається подібним», Демокріт уважав, що душа складається з найдрібніших атомів кулястої форми (того ж виду, що й вогонь). Тому душа передає тілу тепло й рух – життя. Атоми душі та тіла фізично «перемішані», але ціннісна першість у парі душа-тіло належить душі.

Згідно зі словами Аристотеля, Демокріт ототожнював душу й розум. Але Аристотель вивів це силлогістично. У досократовскій традиції ще не було вчення про ієрархічну структуру душі, уперше розробленої Платоном. Для передачі ідеї про центр свідомості й розуміння в людині Демокріт використовує терміни «душа» (ψυχή), «пізнання» (γνώμη), «розум» (φρῆν), «міркування» (τὸ φρονεῖν), «мислення» (νοεῖν). Як душа відмінна від тіла, хоча теж складається з атомів, так і розум відрізняється від душі. Існує два види пізнання – справжнє (γνώμη γνησιή) і темне (γνώμη σκοτιή). До темного належить сприйняття за допомогою п'яти органів чуття, а до справжнього – сприйняття невидимого внаслідок своєї дрібності атомів. Демокріт стверджував, що критерієм достовірності є саме почуття, а розум (φρῆν), якщо відходить від чуттєвого досвіду, ненадійний.

Як ученого Демокріта цікавили питання відмінності сну й неспання, життя та смерті. Останній темі, можливо, було присвячено твір «Про те, що в Аїді», у якому філософ зібрав свідчення про людей, які вважалися померлими, але потім повернулися до життя. У межах своєї теорії витікань форм – «ідолів» запропоновано пояснення сновидінь як атомарних образів минулих подій, що перебувають у просторі та потрапляють у душу під час сну. При цьому в пору осіннього листопаду, коли повітря коливає листя, що падає, оболонки долітають до нас перекрученими. Тому доцільно вірити снам у ту пору, коли оболонки літають у повітрі безперешкодно. Після смерті тіла атоми душі розсіюються в навколишньому повітрі, але оскільки цей процес відбувається не миттєво, то навіть мертві тіла, на думку Демокріта, мають здатність відчувати. Філософ вивчав стан летаргічного сну. Випадки так званого «воскресіння мертвих» він пояснював тим, що в уявно померлих «не згасло все життя». Точні ознаки закінчення життя не можуть встановити навіть лікарі. Він проводив спостереження на кладовищах, вивчав посмертні зміни, що відбуваються з трупами, і для кращого збереження радив зберігати трупи в меду. Головною причиною смерті живої істоти, як і причиною загибелі космосу, Демокріт уважав припинення припливу частинок ззовні, здатних підживити душу. Саме тому внутрішнє життєве тепло поступається місцем холоду та смерті.

У контексті **вчення Демокріта про богів і ставлення до релігії** він визнавав існування богів, уважаючи їх розумними істотами, які складаються з атомів, є дуже великими, довгожителями, однак не вічними. Вони, як і все тілесне, продукують певні «ідоли» (εἴδωλα), причому одні «добрі», а інші «злі»; вони віщують майбутнє «своїм виглядом і вимовними звуками», найчастіше ці образи залітають у нас уві сні через пори тіла. Головний підсумок міркувань Демокріта про богів той, що боятися їх не слід, але попросити про благодатний вплив – досить завбачливо. Таке пояснення буття богів, за зауваженням Цицерона, межує із запереченням їх існування. В античності у Демокріта була стійка репутація атеїста. Ворожіння, традиційну віру в богів і посмертну відплату він пов'язував із забобонами й страхом смерті. Виникнення традиційної релігії та віру в існування богів мислитель пов'язував переважно з незнанням істинних природних причин, передусім природи небесних явищ (грім, блискавка, комети, сполуки світил, затемнення Місяця та Сонця).

Етичні фрагменти Демокріта становлять найбільш значне зібрання періоду до Платона. Етика філософа – продовження його атомістичної фізики: як атом є цілковитим і самодостатнім буттям, так і людина є самодостатнім буттям, щастя якої залежить від міри замкнення в собі. Для вираження свого розуміння щастя Демокріт обрав кілька термінів: «благодушність» (εὐθυμίη, евтюмія), «добробут» (εὐεστώ), «безстрашність» (ἀθαμβίη), атараксія. Він використовував також і традиційні категорії «гармонія» та «розміреність». Центральне поняття його етики – евтюмія. Неологізми εὐθυμία і εὐεστώ підкреслювали його відмову від традиційного розуміння щастя як дарованого богами (евдаймонія, εὐδαιμονία) або вдалим випадком (евтюхія, εὐτυχία). Зрештою сам принцип щастя усвідомлювався не зовнішньо, а внутрішньо зумовленим. Значення терміна, передусім, пов'язане із самообмеженням ставлення до тілесних задоволень. Евтюмія виникає завдяки помірності в задоволеннях і розміреному життю. Той, хто володіє благодушністю (ὁ εὔθυμος, по суті, мудрець), уміє радіти тому, що має, не заздрячи чужому багатству та славі. Він прагне до справедливих і законних справ, з огляду на що «і уві сні, і наяву» радісний, урівноважений та воістину здоровий. Він працює на повну («будь-який вид діяльності є приємнішим, ніж спокій»), проте остерігається бути «занадто діяльнісним у приватних і в громадських справах». Евтюмія не тотожна задоволенню, вона є таким станом, за якого душа спокійна та непохитна, не передбачає жодних страхів, забобон чи інших переживань.

Задоволення й страждання Демокріт уважав критеріями розрізнення добра та зла. Однак він уникав гедоністичного оформлення свого вчення, акцентуючи увагу на внутрішньому оціночному критерії, іменованому або «божеством» (δαίμων), або «соромом перед самим собою», що постає як основа моральної поведінки та справжньої «природою» душі, на відміну від зовнішніх спонукань. Здатність соромитися здебільшого передбачає чеснота, на якій ґрунтується виховання людини як запорука розвитку її природи.

Ідеї Демокріта про виховання як другу природу стали плідною альтернативою панування у філософії V століття до н.е. жорсткої опозиції «природа – закон», вплинувши на етико-соціальні теорії періоду античної класики.

На основі атомізму філософ створив всеосяжну філософську систему. Вона включала в себе вчення про буття, космологію, космогонію, теорію пізнання, логіку, етику, політику, естетику. Крім того, у ній представлено низку спеціальних галузей знань, серед яких математика, фізика, біологія, медицина, антропологія, психологія, філологія, теорія музики, педагогіка.

Згідно з Демокрітом, відчуття – це джерело та фундамент розумного пізнання. Відчуття – затьмарений розум. Розум – прояснене відчуття. У межах його концепції відчуття та розум є протилежностями та водночас єдністю. У чуттєвому сприйнятті й у мисленні Демокріт вбачає відображення справжньої реальності, що існує об'єктивно поза нашою свідомістю.

Мислитель був творцем першої системи логіки в Стародавній Греції. Він написав спеціальний трактат у трьох книгах – «Про логіку», або «Канон». На жаль, до нас дійшли лише незначні уривки твору. Як зазначав Аристотель, серед філософів-фізиків Демокріт став першим, хто почав оперувати логічними поняттями та визначеннями.

Відповідно до концепції Демокріта, критеріями істини є:

1. «Досконале відчуття» – чуттєве сприйняття, можливе за умови його наукової перевірки.

2. «Досконалий розум» – розум, що озброєний науковим методом і керується правильними принципами дослідження.

3. Чуттєва практика, тобто перевірка продукованих нами думок, адже застосування в житті певних положень приносить нам користь або шкоду, сприяє нашому благу або заподіює страждання.

Вчення про три критерії істинного пізнання розвинув послідовник Демокріта Навсіфан у своїй праці «Треножник». Назва твору вказує на те, що істина ґрунтується на трьох складових: відчуттях, мисленні та практиці. Згодом демокрітовські критерії істини розглядав учень Навсіфан Епікур.

Зміст праці Демокріта «Про логіку» було спрямовано проти софістів, які заперечували існування об'єктивної істини. Полемізуючи з Протагором, Демокріт налаштовує проти нього його власне становище. Якщо, як вчить Протагор, істинним є все те, що хто-небудь уявляє, то істинним є також заперечення протагорівського положення, а саме – якщо будь-хто вважає, що не все істинно, то й ця думка теж буде істинною. Оскільки істинною оголошується кожна думка, то положення про те, що все є істинним, виявляється хибним.

Зазначений демокрітівський прийом спростування вчення Протагора наводить Платон у діалозі «Теетет». Полемізуючи з Протагором, Демокріт доводить, що істина – одна для всіх людей, що вона об'єктивна.

Демокріт обґрунтовував логіку на емпіричній основі. Він був одним із творців індуктивної логіки, що набула подальшого розвитку в епікурейській школі. Філософ, з одного боку, висловлювався проти «аподейктики» (однобічності дедуктивного методу, властивого раціоналізму), з іншого – проти «епідейктики» (скептицизму софістів, їх показного знання, маскування невіри в істину красномовством).

Згідно зі свідченнями Секста Емпірика, у своїх «Канонах» Демокріт рішуче висловився проти аподиктичного доказу. На його думку, будувати наукові теорії можна лише на основі ретельного спостереження фактів. Водночас емпіричні тенденції в логіці та науковій методології не роблять його вичерпним у межах емпірики. Таким чином, девіз Демокріта: від експерименту до відбиття об'єктивної реальності.

Демокріт відкинув той вид емпіризму, що зводив усе пізнання до відчуттів, передбачаючи суб'єктивні переживання індивіда. Він також висловлювався проти умоглядів, відірваних від чуттєвих даних. Ця принципова позиція Демокріта чітко прослідковується в його математичних дослідженнях. У них він відкинув дві крайності. По-перше, як єдино правильний лише умоглядний метод математичного знання, представлений піфагореїзмом, по-друге, як єдино правильний лише емпіризм, представлений у вченні Протагора, заперечував математику як строгу сферу знання. Істинний шлях пізнання, на думку мислителя, полягає в тому, щоб, ґрунтуючись на чуттєвому сприйнятті, одиничних фактах, спостереженнях, осягати розумом об'єктивну реальність.

Науковий метод Демокріта полягає у зведенні складного судження до простого, його розкладанні на частини, пошуку найпростіших неподільних елементів для подальшого пояснення всього складного як сукупності цих складових. Завдання наукового знання полягає в тому, щоб відкрити найпростіші елементи і з огляду на різноманітні способи їх поєднання обґрунтувати всі складні явища.

Застосовуючи цей метод у межах логіки, Демокріт установлює первинні елементи мислення. Такими є поодинокі факти чуттєвого сприйняття, у по’єднанні яких виникають найпростіші судження, що складаються з двох елементів – суб’єкта й предиката. Далі йдуть більш складні утворення, що передбачають поєднання суджень. Те, що суб’єкт судження Демокріт називає «ім’ям», а предикат – «дієсловом», свідчить про нерозривний зв’язок мислення та мови в логіці Демокріта.

Демокріт досліджував проблему співвідношення між словом і позначуваним поняттям. Він звернув увагу на випадки, у яких відсутній строгий паралелізм між словом і поняттям:

1) коли одним і тим самим словом позначаються зовсім різні речі;
2) коли одна й та сама річ позначається різними словами;
3) випадки перейменування імен;
4) коли річ не має імені і доводиться користуватися описом.

Судження Демокріт усвідомлював як зв’язок суб’єкта й предиката, їх сполучення або відповідний поділ, тобто як поєднані або розділені речі в дійсності.

Визначення Демокріт тлумачив як вказівку на те, з чого річ складається. Наприклад, поняття війська він визначав як сукупність індивідів, які утворюють військо. У фізиці Демокріта кожен предмет було визначено числом, формою, розташуванням і порядком атомів, що утворюють цей предмет.

Якщо Парменід дав перше формулювання закону тотожності (у метафізичному його тлумаченні), то в Левкіппа й Демокріта представлено перше формулювання закону достатньої підстави в його онтологічному розумінні. Ніщо не відбувається безпричинно, але все має достатню підставу.

Значення логіки Демокріта полягає, передусім, у тому, що вона започаткувала особливий напрям у логіці, представлений після нього епікурейською школою, представники якої залишили значне надбання в цій галузі знання.

Демокрітовсько-епікурейський напрям у логіці є, за своїми ключовими положеннями, провісником логіки Ф. Бекона. Окремі складові логічного вчення Демокріта взяв до уваги Аристотель. Низку демокрітівських положень систематизовано в працях Аристотеля «Категорії», «Перша аналітика», «Метафізика» і «Топіка». Водночас, зважаючи на матеріали, що дійшли донині, повноцінного уявлення про вплив його логічного вчення на концепцію Аристотеля сформувати не можна. У межах полеміки Платон у низці своїх діалогів наводить логічні погляди Демокріта, не згадуючи імені останнього.

Логічне вчення Демокріта було матеріалістичним, поставало як вчення про відображення об'єктивної дійсності в пізнавальній діяльності.

Підбиваючи підсумки, можна зазначити, що стихійне та усвідомлене застосування методів (шляхів) логіки натурфілософами в досократичний період античності зумовив появу першої в європейській історії науки картини світу. Тому з упевненістю можна стверджувати, що логіка – це інструмент пізнавальної діяльності й аргументації під час обґрунтування власної позиції. Водночас ключові положення, представлені у вигляді законів правильного мислення – законів логіки, систематизував Аристотель у праці «Органон».

1.1.2. Аристотель як систематизатор логічної методології, основоположник наукової логіки

Диференціюючи наукове знання, Аристотель узагальнив і систематизував логічні методи своїх попередників (представників мілетської школи, Демокріта, Зенона, софістів, Сократа). Філософ розкрив основні форми й закони мислення, створивши першу теорію виведення – силогізм. Його дослідження у сфері формальної логіки є настільки фундаментальними, що визначають засади дослідження сучасної класичної логіки. Створена ним логічна система впродовж багатьох століть суттєво впливала на розвиток науки, освіти, культури в країнах Європи, де вона була найбільш поширена.

Пізніше чимало відкриттів у зазначеній сфері здійснили логіки середньовіччя, епохи Нового часу, представники німецької класичної філософії. З другої половини XIX століття починається становлення сучасної «класичної» – математичної логіки, у межах якої міркуванням властива знаково-символічна форма.

Проте результат Аристотелівських досліджень – традиційна логіка – залишився першоосновою логіки, її фундаментом. Тому зрозуміло, що, коли йдеться про старогрецьку логіку, мається на увазі не якийсь локальний історичний період в розвитку цієї науки, а відкриття, що стало надбанням цивілізації на всі часи її існування. Тут хронологічний показник не є визначальним, він лише вказує на часові межі виникнення цього відкриття. Так само, як і фізика І. Ньютона не є надбанням лише XVIII століття, Аристотелева формальна логіка має всезагальне значення в усі часи.

У 70 р. до н.е. послідовник і коментатор вчення Аристотеля Андронік Родоський об’єднав його логічні твори в трактат під назвою «Органон» (від грец. organon – знаряддя, інструмент, засіб пізнання, дослідження).

«Органон» складається з п’яти творів:

1) у праці ***«Категорії»*** Аристотель розкриває природу найзагальніших понять, або категорій;

2) у творі ***«Про тлумачення»*** запропоновано визначення судження як форми мислення, здійснено класифікацію суджень, досліджено умови їх істинності;

3) ґрунтовне опрацювання логічної системи Аристотеля наявне в праці ***«Аналітики»,*** що складається з двох книг: у «Першій аналітиці» розглядається силогістика (вчення про висновок), у «Другій аналітиці» – теорія доказу;

4) трактат ***«Топіка»*** присвячений теорії вірогідних доказів;

5) у праці ***«Про софістичні спростування»*** досліджено джерела неправильних умовиводів і доказів, засоби виявлення й усунення помилок.

На думку Аристотеля, логіка є не самостійною наукою, а знаряддям («органоном») кожної з наук. Античний мислитель систематизував правила та прийоми, необхідні для пізнавальної діяльності, що полягає в розмірковуванні як про звичайнісінькі властивості, так і про складні процеси та явища дійсності.

Логіка античного філософа – це «мислення про мислення». Аристотелева логіка вивчає: основні види існування, яке підпадає під окремі поняття та визначення; поєднання й розділення видів існування, що виражається в думці; способи, якими розум за допомогою міркувань може перейти від відомої до невідомої істини.

Мислення – це сутність логіки. На думку Аристотеля, мислення – це не конструювання, тобто створення розумом якоїсь нової суті, не уподібнення в акті мислення тому, що перебуває поза нами. Мислення – це створення поняття, що є ототожненням розумом того, що розглядається з певним видом сущого, а думка – вираженням поєднання видів сущого. До виведень науку спрямовують відповідні правила, закони суперечностей і третього, що виключає, оскільки цим основоположенням підкоряється все існуюче.

Питання про те, що таке існування, Аристотель пропонував розглядати шляхом аналізу висловлювань про існування.

«Висловлювання» у перекладі з грецького – «категорія». Античний філософ стверджував, що всі висловлювання певним чином стосуються існування, але найближчою до існування є Аристотелівська категорія суті, тому її мислитель і ототожнив з існуванням.

Найбільш загальні висловлювання – це категорії. Будь-яке слово, узяте відособлено, поза зв'язком з іншими словами, наприклад, «людина», «біжить» (але не «людина біжить»), означає певну категорію:

- «суть» (категорія суті);
- «скільки» (категорія кількості);
- «яке» (категорія якості);
- «у відношенні до чогось» (категорія відношення);
- «де» (категорія місця);
- «коли» (категорія часу);
- «перебувати в якомусь положенні» (категорія положення);
- «володіти» (категорія володіння);
- «діяти» (категорія дії);
- «випробовувати» (категорія страждання).

Таким чином, Аристотель визначив десять найбільш загальних висловлювань – категорій. Він був першим в історії філософської думки, хто вдався до категоріального осмислення існування.

У «Першій аналітиці» з'ясовано призначення логічного вчення. «Воно про докази, і ця справа науки, яка доводить»[5]. Доведеними, дедуктивними є науки, що досліджують причини, які відповідають на питання «чому є?»[6]. Не кожне знання визначається як наукове, а лише те, предметом якого є вічне, непорушне, що ґрунтується на основі певних принципів, вимагає доказів.

Доказ – це силогізм, «який ґрунтується на істинних, вихідних [положеннях] чи таких, знання про які бере свій початок від перших істинних положень[7]. В обох цих працях деякі терміни вжито як синоніми: «доказ», що «доводить силогізм», «науковий силогізм». Від силогізму, що доводить, відрізняються діалектичний, евристичний, або софістичний силогізми.

[5] Аристотель. Первая аналитика / Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с. 24а

[6] Аристотель. Вторая аналитика. / Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с. 71а-15

[7] Аристотель. Топика / Аристотель Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с. 100b-30

Категорії Аристотеля

Порядок опублікування логічних творів Аристотеля не випадковий. Він відображає дидактичну структуру логічного знання, від простого до складного. У «Категоріях» ідеться про слова, що висловлюються «без якого-небудь зв'язку» і означають найзагальніші характеристики буття. Аристотель перелічує десять категорій (kategoreo – висловлюватися, стверджувати, судити): суть, якість, кількість, відношення, місце, час, положення, володіння, дія, страждання. Вони відповідають на питання: «що саме?» «яке?», «скільки?». У «Метафізиці» Аристотель або зводить усі логічні категорії до трьох (суть, властивість, відношення)[8], або ж зводить чотири останні категорії першого списку до однієї – рух[9].

З аналізом категорій пов'язане істотне, уже не суто логічне питання: що таке категорії? Народження буття? Чи, можливо, форми думки? Або граматичні форми, просто імена, слова? Усі ці точки зору висловлено в історико-філософській літературі. Відображаючи окремі аспекти концепції Аристотеля, вони мають певні підстави. Проте зведення категорій до якоїсь однієї позиції неправомірне.

Вчення філософа про категорії ґрунтується на вивченні становлення буття, а також його загальних характеристик, що виявляються в поняттях, істинних лише настільки, наскільки вони відображають ці характеристики. Тому вчення Аристотеля про категорії – синтетична, і водночас недиференційована концепція, у якій категорії передбачають одночасно характеристики буття, як і логічні та граматичні характеристики. Їх диференціація – справа майбутнього. У цьому і досягнення, і прорахунок вчення Аристотеля про категорії.

Вчення Аристотеля про сутність

Перша з категорій – «сутність» (oysia). У «Категоріях» Аристотель виділяє «перші» сутності, якими є окремо існуючі предмети, «як, наприклад, окрема людина або окремий кінь»[10] – індивідуальний, одиничний предмет, який ми визначаємо, приєднуючи до нього

[8] Аристотель. Метафизика / Аристотель Собр. соч. в 4-х томах. Т. 1 – М. : Мысль, 1976. – 530 с. XIV, 2, 1089b

[9] Аристотель. Метафизика / Аристотель Собр. соч. в 4-х томах. Т.1 – М. : Мысль, 1976. – 530 с. X, 2, 1054a

[10] Аристотель. Категории / Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. Т.2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с. 5, 2a

предикати, що означають якість, кількість. Але чи не парадокс перед нами? Адже Аристотель (як і раніше Платон) знанням уважає осягнення не одиничного, а загального. Мислитель запроваджує поняття «другі сутності», тобто роди й види (загальне, нерозривно пов'язане з одиничним і без нього неможливе). Але категорія сутності виявляється тоді найзагальнішим поняттям, що означає всі самостійно існуючі речі, розчленованим водночас на роди та види. У логічній ієрархії, що відображає співвідношення одиничного, особливого та загального, сутність посідає як найвище (усе самостійно існуюче є сутністю), так і найнижче (кожне самостійне існуюче є сутністю) становище. Вона є, по-перше, вищим родом, а по-друге, одинично сутнісною.

Можна припустити, що «Категорії» – один із ранніх творів Аристотеля, що належать до початку його самостійної діяльності в Лікеї. Відобразивши діалектику одиничного, особливого й загального в одиничних речах – «перших сутностях», він потім відступає від цієї точки зору, тлумачачи роди та види як «форми» (morphe, idea), – «сутність буття», понятійні визначення, внутрішньо властиві окремим предметам. Тому змінюється й визначення сутності. Аристотель, зокрема, стверджує:, «формою я називаю суть буття кожної речі та її першу сутність»[11]. Водночас цим передбачено тотожність форми й одиничного предмета: сутність буття тотожна з одиничною річчю, узятою відокремлено; вони тотожні завжди, коли йдеться про все те, що «отримує позначення не через відношення до іншого, а як самостійне та первинне»[12], – одиничні речі.

Іншими словами, в концепції Аристотеля немає остаточної чіткості у визначенні того, що таке сутність. Традиція платонізму, сприйнята ним у перетвореній формі, спонукає його шукати «сутність буття» загалом, у «формі» та «ідеї». Апелювання до речей як єдино існуючих реальностей спонукає його, навпаки, до визнання сутності одиничною річчю. Але ж остання – щось складне, складене з матерії та форми, отже, вона не може бути первинною.

[11] Аристотель. Метафизика / Аристотель Собр. соч. в 4-х томах. Т. 1 – М. : Мысль, 1976. – 530 с. VII, 7, 1032b

[12] Аристотель. Метафизика / Аристотель Собр. соч. в 4-х томах. Т. 1 – М. : Мысль, 1976. – 530 с. VI, 6, 1031b

Вчення Аристотеля про судження

У другій праці «Органона» Аристотеля – «Про тлумачення» ідеться вже не про окремі слова, а про складні логічні вирази. Це не категорії («Сократ», «людина», «сидить», «біжить» тощо), а висловлювання або судження, складені з них, зокрема такі, що виражають істину чи брехню («Сократ сидить», «Людина біжить», «Сократ є людиною» та інші). Висловлювання класифікуються залежно від кількості (загальні та приватні) і якості (ствердні й негативні) на чотири види: А – загальностверджуючі («Усе S суть P»), I – частковостверджуючі («Деякі S суть P»), E – загальнонегативні («Жодне S не є P») і Про – частково негативні («Деякі S не суть P»). Співвідношення сумісності висловлювань визначаються логічним квадратом.

Аристотель також розглядає модальності логічних висловлювань: можливість і неможливість, випадковість і необхідність, з’ясовуючи, які висловлювання, що їх виражають, сумісні, а які ні. Взаємовідносини висловлювань (суджень) визначаються правилами або законами мислення: це закон тотожності (А є А – поняття повинне вживатися в міркуванні в одному певному значенні); закон виключення протиріччя (А не є Не– А), і закон виключеного третього (А або Не-А, – або А, або Не-А істинно, «третього не дано»). Іншими словами, у логічному судженні та висновку поняття (терміни) й судження (висловлювання) не повинні один одному суперечити, істинність стверджуваного судження означає хибність його заперечення. На цій позиції ґрунтується вчення про силогізм.

Силогізм Аристотеля

Силогізм – «висловлювання, у якому під час стверджування чого-небудь із нього випливає дещо відмінне від стверджуваного і (саме) з огляду на те, що це і є»[13]. Так, з того, що всі люди смертні та Сократ – людина, витікає, що Сократ смертний. Аристотель розрізняє три фігури логічного силогізму (четверта була відкрита пізніше), кожна з яких включає 16 модусів. Досконалими Аристотель уважає силогізми першої фігури, з модусів якої правильні лише чотири. Силогізми другої та

[13] Аристотель. Первая аналитика / Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с. I, 24b

третьої фігур «недосконалі», оскільки дають приватне, а не загальне твердження.

Досконалий силогізм – той, у якому терміни «так співвідносяться між собою, що останній цілком міститься в середньому, а середній цілком міститься або не міститься в першому»[14]. Чотири його модуси такі: MaP – SaM = SaP (Barbara); MeP – SaM = SeP (Celarent); MaP – SiM = SiP (Darii); MeP – Sim = SoP (Ferio). Сенс силогізму полягає в тому, що в ньому два крайні терміни (S і P) з'єднуються за посередництва третіх, середніх (M), загальних для обох посилань. Відсутність такого загального терміна або вживання його в різних значеннях руйнує силогізм.

Логічний силогізм підпорядкований правилу, що називається dictum de omni et nullo: усе, що стверджується про цілий рід або вид, стверджується також і про будь-яке поняття, підлегле цьому роду або виду, а все, що про них заперечується, заперечується і про нього. Не вдаючись до деталей вчення про силогізм, заначимо, що останній є фактично методом розкриття імпліцитного змісту вже готового знання: висновок наявний у посиланнях. Тому силогізм не можна ототожнити з доказом взагалі.

Аристотель знає безпосередній логічний висновок: деякі політики – брехуни, деякі брехуни – політики. Описавши «діалектичний силогізм», учений убачає в ньому «спосіб, за допомогою якого ми спроможні з правдоподібного зробити висновки про кожну передбачувану проблему, уникнувши суперечності»[15].

«Топіка» Аристотеля

Проблему «діалектичного» методу Аристотель розкрив у «Топіці» – творі, де він аналізує «топи» (topos, множина topoi) – загальні прийоми логічного мислення, використані в діалозі щодо досягнення істини. У праці розглянуто понад 300 «топів», і тому їй відводилася роль «складу» допоміжних засобів аргументації, які слід мати під рукою для використання під час суперечки. Аристотель, аналізуючи структуру платонівських діалогів і формулюючи «топи», розробляє метод руху пізнання до істини, причому з використанням не лише необхідних, а й вірогідних (лише правдоподібних) положень. «Топіка» навчає сходити від

[14] Аристотель. Первая аналитика / Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с. I, 25b

[15] Аристотель. Топика / Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с. I, 1, 100b

«правдоподібного» до «істинних і перших» положень, що «достовірні не через інші [положення], а через самих себе»[16]. Цьому і слугує використання різноманітних «топів». Так, «топи, що стосуються багатозначності слів», сприяють встановленню істини, якщо слова сумісні, а до помилковості – якщо вони не сумісні. Наприклад, медицину можна визначити і як знання про здоров'я (відповідно до її мети), і як знання про належний спосіб життя (відповідно до засобів, які застосовують задля цієї мети).

Використовуючи окремі «топи», Аристотель розробляє і їх систему, показуючи, що логічний діалог повинен містити в собі такі компоненти:

1) постановку проблеми;

2) засоби правильної побудови умовисновку, зокрема правила прийняття положення, з'ясування значення кожного імені, знаходження відмінностей і схожості;

3) правила побудови умовиводу – індуктивного або дедуктивного;

4) стратегію ставлення запитань;

5) стратегію відповідей на питання.

«Діалектичний» (діалогічний) метод Аристотель розглядає як шлях до «витоків». Проте це, як і вся логіка філософа, є фактично вченням про доказування, що здійснюється за допомогою зведення до загальних принципів або виведення з них. Звідки ж беруться ці загальні принципи окремих наук або знання взагалі? Іншими словами, чи може існувати логіка відкриття? Ні, не може! Навіть індукцію мислитель розглядає лише як доказ загальної тези, що виходить із частки: це особливий силогізм, у якому загальне підтверджується одиничним. Так, якщо в силогізмі власне доводиться смертність Сократа на основі того, що людина смертна взагалі, то в індукції смертність людини (людей) випливає зі смертності Сократа, Платона, Калликла та інших. Але ж справжнього висновку тут немає – ми не можемо перелічити всіх людей і зафіксувати, що усі вони смертні, бо для цього потрібно зафіксувати й нашу власну смерть. Тому перед нами лише підтвердження загальної тези. Лише індукція через звичайне перелічення, коли фіксується, що всі предмети цього виду мають певну властивість, якою наділений кожен із них, дає достовірне загальне знання.

Отже, пошук загальних витоків – справа не логіки, а «першої філософії» (метафізики). Воно полягає в усвідомленні розумом, в умоглядному осягненні сутності речей, їх «форми» та «суті буття».

Логіка Аристотеля завершується аналізом логічних помилок,

[16] Аристотель. Топика / Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с. I, 1, 100b

свідомо або несвідомо здійснюваних людьми. У своєму останньому логічному трактаті «Про софістичні спростування», який іноді розглядається як остання (дев'ята) книга «Топіки», він показує, що всі логічні помилки є нічим іншим, як погрішностями в силогізмі. Вони, своєю чергою, розділяються на мовні помилки (двозначність слів – омонімія або виразів – амфіболія; неправильність поєднання або розділення думок; помилки в наголосах і вживання однієї граматичної форми замість іншої) та позамовні помилки (власне логічні: підміна сутності випадковою ознакою, змішення абсолютного й відносного, незнання сутності доказу, передбачення основи, припущення причини в тому, що не може нею бути, і поєднання багатьох питань в одне).

Така класична, вироблена з дидактичною метою система Аристотелівської логіки є цілком виправданою, адже логіці впродовж двох тисячоліть належала переважно роль навчальної дисципліни. Останні дослідження з історії логіки дають змогу зробити висновок, що шлях дослідження логічних питань був протилежний шляху викладу. Дослідження Аристотеля розпочинається з реальної практики діалогічного мислення, з платонівського діалогу («Топіка»), ураховуючи перехід до абстрактних форм висновку («Аналітики»), і лише потім розгортається теорія судження або висловлювання («Про тлумачення») і вчення про терміни або поняття («Категорії»). У цьому контексті цілком зрозуміло, чому «Категорії» розглядалися та можуть розглядатися як останній трактат Аристотелівської логіки та перший – «метафізики». Досліджені там поняття дійсно наближені до тих «причин і витоків», які є предметом «першої філософії».

Отже, Аристотель виробив парадигму (зразок) логічного дослідження, яка панувала упродовж більше двох тисячоліть. Спроби напрацювання нового в логіці наявні лише в другій половині XIX – початку XX століть на основі, по-перше, діалектики, по-друге, тлумачення логічною наукою математичного знання.

1.2. СТАНОВЛЕННЯ ТА РОЗВИТОК КЛАСИЧНОЇ ЗНАКОВО-СИМВОЛІЧНОЇ (МАТЕМАТИЧНОЇ) ЛОГІКИ – НОВОЇ ПАРАДИГМАЛЬНОЇ КОНСТРУКЦІЇ ФОРМ МИСЛЕННЯ

1.2.1. Мислителі XVII століття, які вивчали проблематику знаково-символічної (математичної) логіки

У XVII столітті в центрі уваги наукової думки перебувала проблема створення загальних методів для вирішення якомога ширшого кола завдань, що висуваються прогресуючим зростанням природознавства. У якості одного з таких методів виникла буквена алгебра – знаково-символічна логіка. Це означало суттєве розширення засобів науково-логічного – позаемпіричного дослідження.

Серед численних мислителів XVII століття, які досліджували проблематику знаково-символічної (математичної) логіки, слід відзначити постать німецького науковця Іоахіма Юнга та бельгійського філософа Арнольда Гейлінкса.

Іоахім Юнг (Ioachim Jungius) народився 21 жовтня 1587 р. в Любеку в професорській сім'ї, помер 23 вересня 1657 р. в Гамбурзі. Свою діяльність він розпочав із вивчення філософії, математики та природничих наук. У 1609 р. отримав звання магістра вільних мистецтв. Уже в 22 роки він став професором математики в Гіссені. Потім на зміну математиці прийшло захоплення медициною. У 1624 р. Юнг став професором математики в Ростоці, а в 1625 р. – професором медицини в Гельмштедті. У 1626 р. він знову обіймає посаду професора математики в Ростоці. У тому ж році переїжджає до Гамбурга, до стає ректором місцевої академічної гімназії.

Наукові інтереси І. Юнга зосереджувалися здебільшого у сфері математики та фізики. За свідченням Г. Лейбніца, І. Юнг розкрив помилковість твердження Г. Галілея про те, що підвіщена за два кінці нитка витягується параболою. Ще до Г. Лейбніца І. Юнг активно обстоював доцільність широкого впровадження математичних (абстрактних) методів пізнання природи, а також необхідність кількісного виміру емпіричних процесів.

Серед праць І. Юнга можна виокремити «Logica Hamburgensis» (Гамбург, 1638 р., перевидання – 1681 р.); «Doscoscopial physical minores» (1662 р.). В останньому трактаті автор постає прихильником емпіричної методології Ф. Бекона, але з акцентуванням уваги на математичному трактуванні наукових і теоретико-пізнавальних проблем. І. Юнг намагається здолати певну недооцінку математичних методів дослідження, що, на жаль, притаманна працям Ф. Бекона.

Проблематика створення логіки, орієнтованої на наукове застосування, була предметом вивчення в концепціях Р. Декарта і Б. Паскаля. Більш конкретно зазначену проблематику розвинули спочатку І. Юнг (праця «Logica Hamburgensi»), а потім Г. Лейбніц.

У 1638 р. І. Юнг висловив думку про необхідність будови логіки, схожої на математичне обчислення. Він довів, що класична силогістика не спроможна охопити все, що дійсно наявне в науці. Філософ обґрунтував таку теорію силогізму, яка за своєю природою надалі стала характеризуватися як частина теорії стосунків. Як елементарний тип висновку, що не формалізується засобами силогізму, І. Юнг наводив такий приклад: Якщо А є батьком В, то В є сином А. Ось інші приклади висновків несилогізму, розглянуті мислителем: Давид – батько Соломона і Соломон син Давида (звернення стосунків); круг – фігура, а отже, той, хто описує круг, описує фігуру. Подібні прості висновки відносно стосунків є досить популярними в математичних доказах.

Слід звернути увагу також на результати логічних напрацювань **Б. Паскаля (1623–1662 рр.)** – математика, який працював у руслі декартівської методології. Його можна вважати одним із попередників сучасного аксіоматичного методу. Він уточнив низку запитань логічної теорії визначення та доказу. Згідно з Б. Паскалем, (праця «Про геометричну мову», «De l’esprit géométrique»), кожен із доказів повинен відповідати таким трьом правилам:

- слід чітко визначити ті терміни, якими належить користуватися;
- у процесі доказування необхідно наводити лише вихідні позиції або очевидні аксіоми;
- під час доказування слід підставляти визначальні елементи замість елементів визначуваних.

Ці правила Б. Паскаль сформулював, ґрунтуючись на аналізі античної математики. На думку філософа, сучасна математика не завжди задовольняє правила визначення понять. Наприклад, метод диференціального й інтегрального числення (одним із попередників якого був він сам), що зароджується за його часів, зовсім не задовольняв уже перше правило Б. Паскаля.

Зазначені правила мали неабиякий методологічний ефект. Автор використав їх, зокрема, як полемічну зброю проти переконань домініканців та єзуїтів («Листи до провінціала»: «Lettres à un provincial»). Б. Паскалю неважко було показати, що церковники частенько відступали від сформульованих ним правил. Ця обставина не лише вражала, а й викликала щирий гнів математика.

Одна з методологічних вимог Б. Паскаля є особливо цікавою. Він забороняє приписувати термінові інший зміст окрім того змісту, який розкривається у визначенні цього терміна (зокрема, необхідно виключати розуміння цього терміна в природній мові в тому разі, якщо цей зміст не входить у відповідне визначення). Можна бачити у викладеній вимозі Б. Паскаля натяк на неоднозначність розуміння термінів у природних мовах та необхідність усунення цієї неоднозначності.

Б. Паскаль підкреслював також необхідність виділення чітко фіксованих невизначуваних термінів, які використовують у межах аксіоматичних побудов.

Перед здійсненням аналізу логічної методології Г. Лейбніца слід виокремити ще одну історичну віху – опублікування в 1662 р. **«Логіки Пор-Рояля».** Облаштувавшись у закритому жіночому монастирі Пор-Рояль, послідовники Р. Декарта А. Арно (1612–1694 рр.) і П. Ніколь (1625–1695 рр.) в 1644 р. почали поширювати рукопис своєї книги «Логіка, або мистецтво мислення» (La logique ou l’art de penser). Перше друковане видання цієї праці вийшло у світ 1662 р. Твір було задумано як шкільний посібник. Логіку автори визначили як мистецтво керувати будь-яким правильним міркуванням, спрямованим на пізнання речей.

Запропонований ними метод наукового мислення було запозичено з геометрії. Автори спрощують низку вчень середньовічної логіки. Іноді вони вдаються до звичайного відкидання численних середньовічних напрацювань, наприклад усувають значну частину змісту трактатів «про властивості термінів». Чимало уваги приділено аналізу складних висловлювань, у тому числі тих, що потребують додаткового тлумачення, а також встановленню формальних умов їх хибності. До них, наприклад, належать такі:

- **x** є лише **p;**
- все **x** суть **y,** окрім тих **x,** які суть **z;**
- **x** найбільше з усіх **y.**

У дослідженні представлено вчення про розкладання складних речень на прості. Наприклад, складне речення «залізо та мідь дешеві й корисні» можна розкласти на такі прості:

- «залізо дешеве»;
- «залізо корисне»;

- «мідь дешева»;
- «мідь корисна».

В окремих випадках автори намагаються сформулювати низку змістовних критеріїв замість формальних. Наприклад, вони пропонують змістовний критерій правильності дотримання силогізму.

Водночас логіка Пор-Рояля залишається пов'язаною із середньовічною логікою. Так, Арно та Ніколь чимало уваги приділяють систематизації схоластичного вчення про проведення диспутів, пов'язаного з виділенням аспектів міркування (loci communes). Останні визначаються янсеністами як основні принципи, до яких можуть бути зведені різноманітні прийоми доказування та спростування, використовувані в тих або інших випадках. Наявне також виоремлення низки «аспектів», серед яких логічні, граматичні та філософські. Таким чином, опосередковано було визнано, що проблематика Аристотелівської «Топіки» все ще заслуговує на подальше розроблення.

Предметом останнього розділу «Логіки Пор-Рояля» є аналіз висловлювань про майбутнє, з огляду на що автори наводять низку початкових відомостей із теорії вірогідності. Праця загалом знаменує виникнення традиційної формальної логіки, що демонструє рішучий крок назад від схоластичної. Особливим досягненням у цьому контексті слід уважати наявність у ній аналога теореми дедукції.

1.2.2. Г. Лейбніц – основоположник знаково-символічної логіки як інструменту дослідження та опису нових уявлень про картину світу

МЕТАФІЗИЧНІ ОСНОВОПОЛОЖЕННЯ «УНІВЕРСАЛЬНОЇ НАУКИ» («SCIENTIA GENERALIS») Г. ЛЕЙБНІЦА ЯК ВИЗНАЧЕННЯ СТРУКТУРИ КАРТИНИ СВІТУ. ОНТОЛОГІЯ ЛОГІКО-МАТЕМАТИЧНИХ АБСТРАКЦІЙ В ОПИСІ КАРТИНИ СВІТУ

Творчість Г. Лейбніца належить до періоду переходу від середньовічної схоластичної філософії до філософії новоєвропейської, коли не лише природа, а й Бог були об'єктом як філософського, так і релігійного пізнання. У XVII столітті античне та середньовічне уявлення про світ почали збагачуватися науковими знаннями. Вони, передбачаючи можливість раціонального пояснення сформованих у середньовічній християнській культурі уявлень про картину світу, наповнили їх своєрідністю нового розуміння. Водночас у центрі уваги на той час залишалася онтологія, що вивчала питання творіння Богом природи та людини. Гносеологічні ж проблеми були вторинними й усвідомлювалися лише як наслідок онтологічних проблем.

Зазначене розрізнення пріоритетів дослідження та опису картини світу дає змогу адекватніше осмислити не лише філософські ідеї Г. Лейбніца, а й способи буття логіко-математичних предметів у його системі дослідження й опису картини світу.

Логіка та математика філософа ґрунтуються на метафізичних засадах, вони буквально пройняті метафізикою. Без розгляду метафізичних передумов неможливий аналіз буття абстрактних логіко-математичних сутностей у творчості німецького мислителя.

Період XVI–XVII століття був ознаменований переходом від Аристотелівського поняття форми як принципу активності до принципу сили. Оскільки природознавство суперечило доктрині Аристотеля, постало завдання: привести всі нові природничо-наукові відкриття у вигляд, що не суперечить Аристотелівському вченню.

Зміни відбувалися внаслідок осмислення нових природничо-наукових результатів і відповідних виведень. Поняття «сила» не відміняло поняття «форма», а, будучи гнучкішим, поступово його замінювало. Воно забезпечувало диференційоване пояснення принципу активності. Такий перехід починався і довгий час тривав у специфічному для того часу переосмисленні ролі першопричини – Бога, який усвідомлювався в межах постійної взаємодії природних тіл після того, як він їх створив. Середньовічна теологія видозмінювалася. Поступово для її обґрунтування почали використовувати природничо-наукові пояснення. Це позначилося на розумінні змісту діяльності Бога в процесі створення ним речей. Іншими словами, виникла актуальна філософська проблема: як першопричина реалізується в природному механізмі всього створеного? Сформувалися два напрями, перший із яких був реалізований Р. Декартом і його послідовниками, другий – І. Ньютоном.

Аналізуючи проблему першопричини руху в природі, Р. Декарт чітко сформулював свою позицію: «... оскільки Бог під час створення матерії наділив її частини різними рухами та зберігає їх таким самим чином і на підставі тих самих законів, за якими їх створював, то він і надалі безперервно зберігає в матерії рівну кількість руху»[17]. Таке твердження давало змогу відповісти на питання щодо причини появи сили. Якщо Бог наділив природу рухом, то означає, сила похідна від руху і в кожному разі взаємодії ця сила виявляється. Якщо Бог забезпечує постійність руху, то завдяки цьому він забезпечує також

[17] Декарт Р. Первоначала философии / Р. Декарт. Соч. в 2-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1989. – 654 с. – С. 368.

загальну кількість сили, яка може зменшуватися в одному місці і такою самою мірою збільшуватися в іншому. На думку Р. Декарта, у природі відбуваються лише кількісні зміни. Основну увагу він приділив поняттям «рух», «фігура», «величина».

Звернемо увагу ще на одну картезіанську тезу в наведеному вище твердженні. Разом із постійністю руху Бог зберіг у природі ті самі закони, за якими її творив, визначивши, відповідно, спрямованість загального руху. Бог розчинився в природі, став тотожний їй, становлячи з нею єдине ціле. Таким чином було утверджено єдине універсальне джерело всього – Бог.

У працях Р. Декарта було започатковано становлення нового напряму – кінетизму, що ґрунтувався на принципі «рух є причиною сили». Загалом Г. Лейбніц позитивно оцінював філософські ідеї Р. Декарта, підкреслюючи їх раціоналістичну спрямованість: «Декарт має великі заслуги, передусім у тому, що відродив прагнення Платона відвести дух від чуттєвого сприйняття»[18].

Інший напрям – динамізм бере початок від праць І. Ньютона. Водночас найбільш ретельно його було обґрунтовано в дослідженнях Г. Лейбніца, який писав: «... поняття сили, або здатності (нім. kraft, франц. force), пояснення якого передбачає особлива наука – динаміка, проливає яскраве світло на істинне поняття субстанції»[19]. Своє непогодження з Р. Декартом Г. Лейбніц пояснив так: «... я дійшов думки (і до того ж правильної), що премудрий Творець у будові системи речей уникнув того, що безпосередньо витікало б із голих законів руху, запозичених із чистої геометрії»[20].

Розглянемо детальніше, який зміст німецький мислитель укладав у поняття «субстанція». Не заперечуючи тезу Р. Декарта стосовно того, що першопричиною всього створеного є Бог, Г. Лейбніц водночас звернув увагу на одну розбіжність. У власне природі, створеній Богом, необхідно виділити основне, тобто субстанцію, а також те, що похідне від основного. Іншими словами, у створеному безпосередньо не діє першопричина, її дію опосередкує субстанція, що є лише ланкою між Богом і природою, яка рухається.

Напрацюванням Р. Декарта і його послідовників таке розрізнення

[18] Лейбниц Г. В. Об усовершенствовании первой философии о понятии субстанции / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 245.

[19] Там само.

[20] Лейбниц Г. В. Опыты рассмотрения динамики. О раскрытии и возведении к причинам удивительных законов, определяющих силы и взаимодействие тел / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 255.

не властиве. Вони виділили для свого аналізу лише похідну частину, рух і його модифікацію – протяжність. На думку Г. Лейбніца, такий підхід є не зовсім правильним. Німецький мислитель дійшов іншого висновку: «... окрім суто математичного та схильного до представлення необхідно передбачити щось метафізичне й таке, що осягається лише розумом, надати матеріальній масі дещо вище, так би мовити, формальний початок, оскільки не всі істини тілесних речей можуть бути виведені з одних лише розумових і геометричних аксіом»[21]. Аналогічну думку Г. Лейбніц навів у праці «Про глибинне походження речей». У створеній природі існує глибше, метафізичне джерело, яке не можна зводити до суто матерії «... фізична необхідність витікає з метафізичної»[22]. Пошуки метафізичного джерела, що реалізовується в змісті поняття «субстанція», спонукали німецького філософа до вивчення праць Аристотеля, його розуміння субстанціальних форм: «Аристотель називає їх першими ентелехіями, я ... називаю їх первинними силами, що містять у собі ...не лише акт реалізації можливості, а й первинну діяльність»[23]. Вказуючи на можливість, наявну в первинних силах, Г. Лейбніц звертав увагу на специфіку субстанції. Вона, будучи нестабільною, усвідомлюється в статусі потенції як первинна, така, що має в цій первинності низку можливостей. Стан нестабільності – це безпосередній стан здатності до діяльності, без якого неможлива власне діяльність, тобто перетворення можливості на дійсність.

Зазначений контекст міркувань зумовив мислителя дійти висновку, який різниться з позицією Р. Декарта. Основний закон природи «... полягає не в збереженні однієї і тієї самої кількості руху, як зазвичай думають, а в тому, що обов’язково зберігається одна й та сама кількість діяльнісної сили»[24]. Так виник інший напрям – динамізм, у межах якого сила усвідомлювалася як причина руху. Цей напрям розробляв не лише Г. Лейбніц, а й І. Кант. Таким чином, Г. Лейбніц, підтримуючи позицію Р. Декарта щодо усвідомлення Бога як

[21] Лейбниц Г. В. Опыты рассмотрения динамики. О раскрытии и возведении к причинам удивительных законов, определяющих силы и взаимодействие тел / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 255.

[22] Лейбниц Г. В. О глубинном происхождении вещей / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 285.

[23] Лейбниц Г. В. Новая система природы и общения между субстанциями, а также о связи, существующей между душою и телом / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 273.

[24] Лейбниц Г. В. О самой природе, или природной силе и деятельности творений / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 293.

першопричини всього, не погоджувався з дослідником стосовно питання розуміння способу впливу першопричини на все створене. Німецький мислитель увів цю ланку до системи стосунків «Бог – природа». Це зумовило створення ланцюжка «Бог – субстанція – природа». Світ не безпосередньо залежить від Бога, а через субстанцію, «одну й ту саму кількість діяльної сили», якою Бог наділив природу. У такому контексті первинні сили є певним невизначеним цілим, що має лише можливість. Г. Лейбніц, погоджуючись з Аристотелем, назвав це ціле першою ентелехією, зауваживши, що її «... зазвичай іменують формою субстанції». Вона є іншим початком природи, що «... спільно з матерією, тобто пасивною силою, становить тілесну субстанцію, що є єдністю, а не просто агрегатом із безлічі субстанцій»[25]. Можна з упевненістю стверджувати, що Г. Лейбніц не вважав субстанцію як дещо ціле, окремо від матерії. Він підкреслював їх єдність, стверджуючи, що реалізована сила є пасивною, оформленою тілесністю. Функціонуюча природа – це постійний перехід можливості в дійсність, нестабільності в стабільність і навпаки. У повній субстанції інший початок природи, первинні сили, посідають особливе місце. Завдяки цьому природа спроможна зменшуватись і рости, згортатись і розгортатись «... допоки в ній зберігається сама ця субстанція, що передбачає певну міру життєвості або … первинну активність»[26].

«Життєвість» виявляється в частинах, тому, окрім первинної, субстанціальної сили, Г. Лейбніц визнавав і довільну, акцидентальну силу. У ній невизначене ціле отримало множинність, створюючи різноманіття активних начал світу. Твердження про множинність, на яку дробляться первинні сили, означає, що в природних тілах, можливо виділити абстрактну інваріантну структуру, що має потенцію. Її Г. Лейбніц позначив терміном «монада»: «Це і є субстанціальний початок, який у живих істотах називається душею, в інших же – субстанціальною формою. Оскільки він становить із матерією єдину субстанцію, або єдине саме по собі, воно утворює те, що я називаю монадою»[27]. Таким чином, німецький мислитель виділяв не лише одну загальну, нерозчленовану монаду або первинну силу, первинну активність, а й їх безліч. Вони набули визначеності в природних тілах, але зберегли в собі всю змістову характеристику первинної сили як

[25] Лейбниц Г. В. Новые опыты о человеческом разумении автора системы предустановленной гармонии / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 2. – М. : Мысль, 1983. – 686 с. – С. 221.

[26] Там само. – С. 22.

[27] Лейбниц Г. В. О самой природе, или природной силе и деятельности творений / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 300.

цілого.

Г. Лейбніц розрізняв **три групи монад:**

- фізичні процеси, що не відокремлюють себе від усіх і себе від себе;
- рослини, тварини, які відділяють себе від усіх, але не можуть відокремити себе від себе;
- розумні монади, що мають самосвідомість, які відділяють себе від усіх і себе від себе.

Зміст терміна «монада» передбачає абстракцію, у якій сила береться до уваги в граничній напрузі. Водночас граничність, на думку Г. Лейбніца, має інший сенс, відмінний від схоластичного розуміння. Німецький мислитель стверджував: «Активна сила відрізняється від широко відомої філософським школам голої потенції, оскільки активна потенція, що розглядається схоластами, або здатність, – це не що інше, як найближча можливість дії, яка водночас потребує стороннього збудника»[28].

Монада має статус абсолютності. Вона виражає стан напруженості в той момент, коли ще немає і не було власне акту дії, не було зіткнення з об'єктом реалізації сили, у результаті якого почалося б зниження рівня напруженості. Цей стан фіксується Г. Лейбніцом у чистому вигляді, без «матеріальних домішок», адже монади «суто активні»[29]. Бути активним означає не мати протяжності, а отже, частин. Саме тому вона не може руйнуватися «... оскільки кожне руйнування в природі полягає в роз'єднанні частин»[30].

У питанні щодо природи субстанції, яку Г. Лейбніц розумів як простий і неподільний початок, він повернувся до античної філософії. Саме неподільний початок діяльності, що становить сутність природних речей, німецький мислитель назвав субстанціальною формою. «Субстанція є істотою, здатною до дії. Вона може бути простою або складною. Проста субстанція – це така, яка не містить частин. Водночас складна передбачає сукупність простих субстанцій, або монад. Монада – слово грецького походження, що означає одиницю, тобто певну єдність. Субстанції складні, або тіла, передбачають значну кількість; субстанції прості, життя, душі, духи –одиниці. Прості субстанції мають

[28] Лейбниц Г. В. Об усовершенствовании первой философии о понятии субстанции / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 245-246.

[29] Лейбниц Г. В. Материя взятая в себе / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 385.

[30] Там само. – С. 384.

бути всюди, адже без них не було б і складних, а отже, природа цілковито сповнена життям»[31].

У цьому контексті стає зрозумілим, що Г. Лейбніц розумів неподільне, монаду не так, як її розуміли атомісти, починаючи з Демокрита, – не як найменшу, далі неподільну частку речовини. Як стверджував Аристотель, будь-яка частка тіла, якою б малою вона не була, має частини – верх, низ, передній та задній боки. Услід за Платоном, Аристотелем і Р. Декартом Г. Лейбніц обстоював безмежну подільність матерії. Неподільне для нього, як і для всіх зазначених мислителів, є чимось нематеріальним. Матеріальність і нескінченна подільність – синоніми. У цьому питанні Г. Лейбніц є більш наближеним до Р. Декарта, ніж до атомістів (Х. Гюйгенса, П. Гассенди та інших).

Таким чином, у XVII столітті, як і в античності, у контексті вивчення поняття неподільного формуються різні філософські напрями. Х. Гюйгенс і П. Гассенди, так само, як і Демокріт, розглядали неподільне, атом, як неподільну частку матерії, наділену, як підкреслював Х. Гюйгенс, неабиякою твердістю. Г. Лейбніц, услід за Платоном, тлумачив неподільне як єдине, одиницю, або як форму, яка є неподільною, адже не містить у собі частин. Саме так, як і в Платона та Аристотеля, неподільне в Г. Лейбніца протиставляється нескінченно подільному. У «Міркуванні про метафізику» Г. Лейбніц писав: «Я знаю, що висловлюю парадокс, прагнучи відновити права стародавньої філософії, відродивши майже забуті субстанціальні форми. Але, можливо, мене не засудять необачно, коли дізнаються, що я досить довго міркував над новою філософією, присвятивши чимало часу проведенню фізичних дослідів і геометричним доказам, … був змушений знову визнати їх»[32]. Можна сміливо стверджувати, що таке трактування форми, а отже, субстанції як неподільного початку істотно відрізняється від античної. Філософські побудови німецького мислителя – це симбіоз науки Нового часу з елементами античного Аристотелізму й платонізму.

Уявлення про силу й діяльність як суті природи слугувало передумовою для створення Г. Лейбніцом динаміки, яку він визначив як науку про закони природи та руху.

Найважливіше положення, на якому ґрунтується динаміка

---

[31] Лейбниц Г. В. Начала природы и благодати основанные на разуме / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 404.

[32] Лейбниц Г. В. Рассуждение о метафизике / Г. В. Лейбниц. – Соч. в 4-х т. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с. – С. 134.

філософа, полягає в тому, що закони руху, які становлять основний зміст науки про природу, не можуть бути пізнані за допомогою однієї лише математики – абстрактного знання. Це положення є спільним у концепціях Г. Лейбніца й І. Ньютона та спрямоване проти картезіанства, у межах якого геометрія повинна дати вичерпні відомості про закони матеріального світу. Г. Лейбніц спочатку поділяв таке переконання Р. Декарта, він визнавав за відношенням до матеріального світу лише jurisdictio imaginationis (законодавство уяви). Законодавство уяви – це спосіб абстрактних – математичних доказів у динаміці з використанням геометричної інтерпретації. Він передбачає усвідомлення матерії як пасивного початку, без визнавання будь-якого руху, окрім відносного. У межах цього положення слід тлумачити також і закон інерції. Отже, законодавство уяви є можливим, якщо враховувати вихідні положення Р. Декарта.

У центрі уваги Г. Лейбніца перебувало питання про перехід від алгебри (урівноваження) кінцевого до алгебри (урівноваженню) нескінченно малих величин, про що свідчить його монадологія й трактування субстанції. Інтеграл (суму нескінченно малих величин) він тлумачить як сукупність незліченної кількості нескінченно малих величин. Основним поняттям диференціального числення були диференціали – нескінченно малі прирости змінних величин.

Особливо слід звернути увагу на дві обставини. По-перше, остання третина XVII століття означена власне відкриттям диференціального й інтегрального числення. Ключова роль у здійсненні цього відкриття належить Г. Лейбніцу, який розгорнуто виклав головні ідеї нового числення в статтях, опублікованих протягом 1682–1686 рр. По-друге, у розвитку вчення про нескінченно малі величини взяли участь майже всі математики XVII століття: Дж. Джоуль, Дж. Валліс, Х. Гюйгенс, Я. Бернуллі та інші.

З опублікування праць Г. Лейбніца в континентальній Європі розпочався період інтенсивної колективної роботи над диференціальним та інтегральним численням, інтеграцією диференціальних рівнянь і геометричними додатками аналізу. У роботі брали участь, окрім власне Г. Лейбніца, Я. Бернуллі, І. Бернуллі, Г. Лопіталь та інші. Саме в XVII столітті було сформовано сучасний стиль математичної роботи, за якого отримані результати досліджень відразу публікували в журнальних статтях, після чого такі результати досить швидко використовувалися іншими вченими під час проведення подальших досліджень

Захоплення надзвичайною силою апарату математичного аналізу природно зумовлює віру в можливість його самостійного розвитку, у безпомилковість математичних міркувань навіть тоді, коли до них належать символи, позбавлені сенсу. Якщо під час аналізу нескінченно малих наявне було невміння логічно впоратися з ідеями, що мали повну наочну переконливість, то тепер відкрито проповідувалося право обчислювати за звичайними правилами позбавлені сенсу математичні вирази, не спираючись ні на наочність, ні на будь-яке логічне виправдання законності таких операцій. Таку позицію дедалі активніше підтримує Г. Лейбніц, який у 1702 р. стосовно інтеграції раціональних дробів за допомогою їх розкладання на уявні вирази говорить про «дивовижне втручання ідеального світу».

На думку Г. Лейбніца, критерієм істинності будь-чого, у тому числі й уявної або абстрактної математичної побудови, що відображає наші уявлення про матеріальний світ, є його несуперечність.

Вищим законом логіки, на якому ґрунтується абстрактний математичний доказ, відповідно, вищим принципом істинного знання він уважав формальний закон тотожності. Здійснити справжній аналіз абстрактної побудови – означає звести його до певного формального твердження, що є тотожністю, тобто «А=А».

Обґрунтувавши логіко-математичний аспект доказу, Г. Лейбніц висловив переконання в тому, що всі істини тотожні, але їх тотожність важко розкрити. На його думку, здійснити справжній аналіз, що тяжіє до вихідних, тотожних положень, не вдалося навіть античним математикам. Г. Лейбніц відкинув висунений Р. Декартом у якості основи наукового знання принцип безпосередньої достовірності, на якому тримається картезіанська критика традиційного мислення. Вимога ставити під сумнів те, що ми отримуємо від попередніх епох, перетворюється в концепції Р. Декарта на неправильне твердження, згідно з яким усе сумнівне є неправдивим. Філософ зауважував: «Водночас я вбачаю корисність несприйняття сумнівного та неправдивого: це означає не позбавляння забобонів, а лише їх заміну»[33]. Не погоджується німецький мислитель також із тим, що ясність і виразність є критеріями істинного поняття. Згідно з Г. Лейбніцом, ця вимога є цілком законною, проте недостатньою для встановлення істинних підстав науки.

Ґрунтуючись на логіці, Г. Лейбніц відновлює значення античної та частково середньовічної філософської традиції, яку, на його думку, несправедливо знехтував Р. Декарт.

[33] Лейбниц Г. В. Замечания к общей части Декартовых «Начал» / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 3. – М. : Мысль, 1984. – 734 с. – С. 173.

На відміну від Р. Декарта, Г. Лейбніц розробляв свою методологію побудови доказів не з позиції діяльності суб'єкта, що пізнає, а в якості структурного закону об'єктивно готівкових предметних зв'язків. У методі побудови доказу Г. Лейбніц убачав логіку, загальну для усіх приватних наук, називаючи її «загальною наукою» (scientia generalis). Початок будь-якого пізнання має бути отримане, згідно з німецьким мислителем, але не шляхом аналізу суб'єкта, що пізнає, а шляхом дослідження природи істини. Водночас Г. Лейбніц повністю розділяв із Р. Декартом, атомістами та І. Ньютоном переконання стосовно того, що математика (абстрактне знання) – достовірніший вид знання. Фізика повинна ґрунтуватися на засадах математики. Проте і щодо цього твердження в концепціях обох філософів існує розбіжність. Німецький мислитель зводив математичні аксіоми до первинних загальних логічних істин, не враховуючи, на противагу Р. Декарту, аксіом геометрії. Математика як вид пізнавальної діяльності, згідно з Г. Лейбніцом, є особливим випадком застосування логіки. Якщо, на думку Р. Декарта, математика є найбільш строгим і чистим типом знання, який повинен слугувати зразком для всієї науки, то Г. Лейбніц, навпаки, був переконаний у тому, що засади аксіом математики не первинні, а ґрунтуються на початкових логічних аксіомах.

Античний критерій ясності й виразності Г. Лейбніц уважав ще не цілком достовірним тому, що виразність передбачає безпосередній розсуд ознак, що відрізняють цей предмет від усіх інших, але водночас самі ознаки відомі нам «не через самих себе». Їх зміст наданий нам, але не пояснений нами. Щоб зрозуміти ознаки «самі через себе», їх треба звести до деяких первинних істин, тобто тотожних пропозицій. Саме до виразного й адекватного знання повинна прагнути наука. Лише таке знання є достовірним. Водночас філософ підкреслював, що складно досягнути виразного й адекватного знання, або навіть і неможливо, адже «немає необхідності згадувати про помилки, що виникають через недоліки пам'яті й уваги та можуть проникнути навіть в арифметичні розрахунки (навіть коли знайдено досконалий метод як у теорії чисел), оскільки неможливо уявити собі такої науки, якій би вони не загрожували, тим більше якщо міркування з огляду на свою складність потребує перевірки»[34]. Якщо ми «звертаємо увагу на природу предмета загалом», то маємо адекватне та водночас інтуїтивне знання – найвищий і такий, якого найважче досягнути, тип знання. Якщо ж ми не в змозі (унаслідок складності й різноманіття цього предмета) осягнути його

[34] Лейбниц Г. В. Замечания к общей части Декартовых «Начал» / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 3. – М. : Мысль, 1984. – 734 с. – С. 176.

загалом нашим внутрішнім поглядом, то змушені вдаватися до позначення окремих визначень за допомогою символів. Таке знання Г. Лейбніц називав адекватним і символічним, або сліпим.

Слід зауважити, що, на відміну від Р. Декарта, виражене в символічному виді знання німецький мислитель іменував «сліпим». Ми спроможні розуміти окремі знаки або пригадувати їх значення, але не можемо щоразу встановлювати наявність у них будь-яких помилок. Таким чином, існує можливість помилки. Будучи вираженим у символічному вигляді, наше знання ґрунтується на потребі. Людський розум неспроможний здійснити інтуїтивне пізнання. Г. Лейбніц переконує: щоб уникнути помилок, необхідно здійснити аналіз понять, розкласти їх до первинних, далі не розкладних, тотожних тверджень, що дасть змогу розкрити суперечність, якщо вона проникла в поняття й залишилася непоміченою.

Можна з упевненістю констатувати, що неможливо відокремити логіку та математику Г. Лейбніца від його метафізичних обґрунтувань науковості знання, що виробляється. Філософ переконував: «… важливо довести всі наші вторинні аксіоми, якими зазвичай користуються, звівши їх до первинних, або безпосередніх, і недоказовних аксіом, тобто того, що я нещодавно назвав тотожними пропозиціями»[35]. Таким чином, доказом мислитель уважав зведення звичайної аксіоми до тотожного положення, яке у своєму строгому значенні є самоочевидним висловлюванням.

Головний недолік математичних (абстрактних) аксіом, зокрема Евкліда, німецький мислитель вбачав у тому, що вони спираються не лише на розум, а й на уяву, тобто не є суто аналітичними пропозиціями, а отже, не можуть претендувати на справжню достовірність. Так, «Евклід, наприклад, уважав аксіомою положення, згідно з яким дві прямі можуть перетнутися лише один раз. Уява, що спирається на чуттєвий досвід, не дає змоги нам уявити більше ніж один перетин двох прямих; але не на цьому слід будувати науку, і якщо хто-небудь думає, що уява дає зв’язок виразних ідей, то це свідчить, що він недостатньо обізнаний стосовно джерела істин, і безліч пропозицій, доводжуваних за допомогою інших пропозицій, що передують їм, слід сприймати як безпосередні»[36].

У цьому твердженні Г. Лейбніц повторив аргумент Платона, який

[35] Лейбниц Г. В. Новые опыты о человеческом разумении автора системы предустановленной гармонии / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х т. Т. 2. – М. : Мысль, 1983. – 686 с. – С. 416.

[36] Там само. – С.463.

характеризував геометрію як науку, що спирається не лише на розум, а й на уяву. Платон поставив геометрію після арифметики. Він визначив геометрію менш строгою з огляду на її звернення до просторових образів, а не суто до понять розуму. Німецький мислитель погоджувався з позицією Платона та Прокла стосовно того, що просторові образи – це сумнівні, неадекватні ідеї, і той, хто з їх допомогою прагне визначити початкові поняття геометрії, не може цього зробити з належною суворістю. «Ось чому Евклід за відсутності чітко вираженої ідеї визначення прямої лінії (його попереднє визначення прямої було неясним, з огляду на що він ним зовсім не користувався у власних доказах) був змушений звернутися до двох аксіом, які замінювали в нього визначення і якими він користувався у своїх доказах. Перша аксіома свідчить, що дві прямі не мають спільної частини, а друга – що вони не утворюють простору. Архімед запропонував своєрідне визначення прямої лінії, зауваживши, що це найкоротша лінія між двома точками»[37].

Якщо підстави античної геометрії є такими нестійкими, то як же слід ставитися до побудованих на них положеннях? Що це – строга наукова система, якою вважали геометрію і в античності, і в середні віки, і вже тим більше в XVII столітті, чи практичне мистецтво, спосіб розв’язання техніко-практичних завдань, яким із старовини вважали логістику? Якщо очевидність аксіом Евкліда має не суто логічний характер, а спирається також на уяву, то «початок» неможливо вважати суто науковою системою. Г. Лейбніц такого радикального висновку не робив. Він визначив, що доцільно обмежитися незначною кількістю таких істин, що здавалися найпростішими, вивівши з них дві, чим залишити множину їх недоведеною і, що ще гірше, надати людям можливість ураховувати все, що завгодно, залежно від настрою. Навіть за допомогою таких, далеко не первинних аксіом було зроблено значні відкриття, яких не було б, якби представники давнини не захотіли рушити вперед до того, як вони не доведуть аксіом, якими вони вимушені були користуватися. Стародавні філософи Греції, на думку Г. Лейбніца, зокрема математики, почали вимагати суворості доказу, прагнучи таким чином знайти первинні аксіоми. Проте сповна виконати цю вимогу в математиці їм не вдалося. Грецькі математики не вважали за можливе вважати наукою те, що дає чуттєве представлення.

Г. Лейбніц зазначав: «Ви та Ваші однодумці думаєте, що було б доцільно враховувати в геометрії те, що підказують нам образи, не прагнучи до тієї суворості доказу за допомогою визначень і аксіом, якої

[37] Там само.

вимагали в цій науці стародавні мислителі (так можуть думати багато необізнаних щодо цього питання осіб). Водночас я вам відповім, що задовольнитися цим можуть лише особи, які беруть до уваги практичну геометрію… Якби стародавні філософи дотримувалися цієї позиції та не проявили суворості в цьому контексті, то, на мою думку, вони не пішли б далеко вперед і залишили б нам у спадок лише таку емпіричну геометрію»[38]. Г. Лейбніц, так само як І. Кеплер, М. Коперник, Г. Галілей, Р. Декарт, визнавав безпосередню залежність між механікою Нового часу й античною математикою.

Усвідомлюючи складність остаточного аналізу абстрактних понять і математичних абстракцій, що ґрунтуються на них, Г. Лейбніц висловив думку про те, що якщо в людському знанні і є аналітичне поняття, то, мабуть, це лише поняття числа. Визначення числа є найбільш досконалим. Про це йдеться тоді, коли аналіз речі прагне до первинних понять, нічого не передбачаючи. Таке визначення поняття речі німецький мислитель назвав реальним і сутнісним, відрізняючи від нього визначення реальне та причинне, що містить у собі спосіб можливого формування речі. Німецький мислитель підкреслював, що в разі причинного визначення доказ можливості теж здійснюється апріорі, проте ця апріорність нижчої якості, ніж перша, адже тут аналіз не доводиться до кінця – до тотожних положень.

Г. Лейбніц довів, що поняття, які цілком можуть бути зведені до тотожних тверджень, або є цілком аналітичними, створені одним лише розумом. Найближчим до них є поняття числа. Геометричні поняття аналізуються настільки, наскільки в їх створенні бере участь розум, і неподільними до тієї міри, до якої ґрунтуються на загальному почутті, тобто на уяві. Саме тому доказування можливості геометричного поняття здійснюється не шляхом аналізу, а завдяки конструкції, тобто шляхом породження предмета, що відповідає поняттю.

В основі метафізичного осмислення Г. Лейбніца, системи абстрактних математичних предметів як елементів опису картини світу лежать його теологічні міркування. Наслідуючи картезіанський підхід, визнаючи необхідність існування законів функціонування, а також пріоритет продуктивної діяльності, німецький мислитель брав за основу теологічну структуру створення світу. Він у своїй концептуальній системі здійснив спробу знайти точки перетину між новим природознавством, традиційною середньовічною філософією та логікою шляхом часткового повернення до античної філософії і науки. Водночас Г. Лейбніц брав до уваги передумови класичної механіки, фізики й

[38] Там само. – С. 464.

астрономії Г. Галілея та І. Кеплера, геометрії Б. Кавальєрі, аналізу Дж. Волліса, Х. Гюйгенса, а також біології О. Левенгука, М. Мальпіги і Я. Сваммердама. Логіко-математичні переконання Г. Лейбніца – це кристалізація його філософських ідей.

МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВОПОЛОЖЕННЯ «УНІВЕРСАЛЬНОЇ НАУКИ» (SCIENTIA GENERALIS) Г. ЛЕЙБНІЦА

Методологія засновника символічної логіки Г. Лейбніца ґрунтується на трьох головних джерелах:

- ідеї Р. Луллія про машинізацію процесу висновку;
- теоретико-пізнавальна концепція Д. Бруно;
- міркування Р. Декарта щодо можливості побудови універсального логіко-математичного методу розв’язання наукових завдань, передусім математичних (ідея «загальної математики»).

Арагонський чернець Р. Луллій обстоював доказування християнського догматизму логічним способом. Він не лише обґрунтував ідею, а й власне розробив першу логічну машину, здатну механізувати процес логічного висновку. Пристрій Р. Луллія виглядав як система концентричних кругів, на які було нанесено позначення понять. Під час обертання кругів поняття певним чином комбінувалися між собою, унаслідок чого формувалися виведення типу силогізму із заданих умов. «Мистецтво» Р. Луллія пропонує будувати всі можливі пропозиції з комбінацій обраних первинних понять. Число таких комбінацій a priori дорівнює 511е = 17.804.320.388.674.561 (!) (тут ураховано також неможливі поєднання термінів). Завдяки використанню концентричних кругів це число скорочується до 531.411 можливої комбінації початкових термінів.

Можливості машини Р. Луллія були досить обмеженими. Проте це не завадило винахідникові вважати її здатною реалізувати будь-яке виведення, зокрема таке, що спроможне відкрити будь-яке істинне висловлювання. Сучасники не змогли правильно оцінити значення ідеї Р. Луллія, що прогресувала. Сенс його «мистецтва» став очевидним лише в контексті успіхів науки XX століття. Водночас подальшому розвиткові спадщини науковця присвятили свою діяльність досить незначна кількість його послідовників.

Г. Лейбніц належав до кола тих науковців, які вивчали луллієве мистецтво. Думки, схожі з його ідеєю комбінаторної характеристики, він міг почерпнути також із творів каббалістичного змісту. Ці твори могли, імовірно, містити цікаві логічні ідеї, подібно до того, як певні алхімічні концепції включали елементи пізніших цілком наукових хімічних концепцій. Проте найбільший вплив на Г. Лейбніца справили логічні послідовники Р. Луллія (пантеїст Д. Бруно, Агриппа Неттесгеймський (1487–1535 рр.), А. Кирхер, І. Альстед (1588–1638 рр.), матеріаліст і епікуреєць П. Гассенди (1592–1655 рр.).

У межах концепції Г. Лейбніца щодо **«універсальної науки» (scientia generalis)** слід розрізняти два аспекти:

- перший пов'язаний із лінгвістичною ідеєю створення «універсальної мови». Цю ідею мислитель запозичив в англійського філософа Д. Далгарно (1627–1688 рр.), який у своїй праці «Ars signorum vulgo character universalis et lingua philosophica» (Лондон, 1661 р.) намагався впорядковувати поняття в таблицях так, щоб від загальних класів можна було дістатися до окремих підрозділів. Нині екземпляр цього твору з відповідними позначками, які зробив Г. Лейбніц на полях видання, зберігається в бібліотеці Ганновера;
- другий аспект ідеї «універсальної науки» (scientia generalis) полягає в прагненні виробити універсальну логічну мову та символіку. На думку Г. Лейбніца, ми вживаємо знаки не лише для того, щоб передати наші думки іншим особам, а й для того, щоб полегшити процес нашого мислення. Тому теоретик не змішує лінгвістичних і власне логічних аспектів такої «універсальної науки».

Дії над знаками повинні відображати в символічній формі всі можливі поєднання предметів, ураховуючи також і неможливі поєднання. Представлену в «універсальній науці» (scientia generalis) систему символічних позначень філософ образно порівнює з ниткою Аріадни, що стає в нагоді для наукового мислення.

Логічний знаково-символічний опис картини світу, що заміняє змістове міркування формальним обчисленням, повинен наслідувати приклад математики. Г. Лейбніц усвідомлював труднощі, пов'язані з реалізацією його ідей, а саме:

- не всі емпіричні наукові положення такою ж мірою очевидні, як окремі математичні поняття;
- виявлення первинних понять окремих наук є надзвичайно складним завданням.

Г. Лейбніц готовий був самовіддано працювати над створенням загального логічного методу, який би дав можливість замінити змістове міркування формальним обчисленням. На його думку, замість непродуктивних суперечок учені зможуть обговорювати можливість обчислення понять.

Мислитель переконаний, що «універсальна наука» (scientia generalis) у логічному контексті є системою точно встановлених знаків, за допомогою яких в логіці й інших дедуктивних науках повинні позначатися прості елементи об’єктів, що становлять предмет дослідження цієї науки. Ці знаки повинні бути короткими й стислими за формою; містити максимум сенсу в мінімумі позначення; ізоморфно відповідати поняттям, які вони позначають, тобто представляти прості ідеї якомога природнішим способом.

Таким чином, складні ідеї будуть представлені за допомогою поєднань елементарних ідей. Мовою «універсальної науки» абстрактні тези логіки постають у вигляді наочних правил, що регулюють дії із символами. Ці правила описують формальні властивості знакових перетворень, ґрунтуючись на звичках наочного представлення.

На думку Г. Лейбніца, «універсальна наука» (scientia generalis) як логічна алгебра має бути використана в різних видах пізнавальної діяльності. Логічна алгебра зазнала невдач схоластичної логіки. Невдачі останньої, на думку Г. Лейбніца, полягають у відсутності в ній строгої мови із відповідною системою формалізації.

«Універсальна наука» (scientia generalis) позначає всі прості елементи логічних міркувань буквами, складні логічні міркування – формулами, судження – рівняннями. Ця характеристика дає змогу вивести з даних досвіду всі логічні наслідки.

Для нової логічної універсальної науки Г. Лейбніц використав французьке словосполучення «scientia generalis», яке можна вжити паралельно з поняттям «analysis speciosa» французького математика Ф. Вієтти (1540–1603 рр.), що вживав букви як знаки для позначення величин. Термін «scientia generalis» вказує на мету Г. Лейбніца: розробити універсальну систему позначень, за допомогою якої можна було б розкладати утримування понять на складових елементах за допомогою числення.

Іншим джерелом методологічних концепцій Г. Лейбніца була гносеологія Д. Бруно, який надавав важливого значення зручній символіці, будучи попередником монадології. На думку останнього, основною одиницею буття є монада, тобто індивідуальний елемент буття, у якому органічно поєднані матерія та форма. У межах концепції Д. Бруно досконалість цілого й частин полягає в тому, що вище відображене в нижчому. Причина завжди полягає в дії, процес удосконалення є лише реалізацією потенційного володіння.

Третім джерелом методології Г. Лейбніца була концепція універсальної математики (mathesis universalis) Р. Декарта. Саме завдяки працям Р. Декарта в математику було введено буквені числення та систематичне вживання змінних.

Таким чином, можна констатувати певні **результати логічних числень Г. Лейбніца.** Так, логіка є наукою, що озброює інші науки методами відкриття й доказування всіх наслідків на основі наявних даних. У своїх працях він іноді іменує логіку термінами «vernunftkunst» і «denkkunst».

Основоположення знаково-символічної логіки Г. Лейбніца стисло можна викласти так:

1. Кожне поняття може бути зведене до фіксованого набору простих понять (таких, які надалі розкласти неможливо). Цей набір береться з певної сукупності елементів, що становлять «алфавіт думок».

2. Складні поняття виводяться з простих лише за допомогою операції логічного множення, що відповідає кон'юнкції в численні висловлювань і операцій перетину об'ємів понять у логіці класів.

3. Набір простих понять повинен відповідати критерію несуперечності.

4. Будь-яке висловлювання є предикативним, адже воно може бути еквівалентно переведено в іншу форму, у якій предикат уже стосується суб'єкта.

5. Будь-яка істинна ствердна пропозиція є аналітичною з огляду на те, що її предикат наявний у суб'єктові.

Зазначені вихідні логічні ідеї Г. Лейбніца перебувають у тісному зв'язку з його методологічними переконання. Наприклад, п'ята теза є логічним поясненням лейбніцівського трактування закону достатньої основи. Подібно до того, як суб'єкт є достатньою умовою для предиката судження, причина є достатньою основою для наслідку.

Г. Лейбніц як автор перших логічних алгоритмів акцентував увагу переважно на дедуктивно-аксіоматичному аспекті логічних досліджень. Не все в логічній програмі філософа витримало випробування часом. Зокрема, розвиток сучасної науки продемонстрував принципову нездійсненність його універсальної науки (scientia generalis). Непридатною виявилася методологічна ідея Г. Лейбніца про зведення всього змістового мислення людини до певної кількості формальних математичних числень. Такою самою безуспішною виявилася спроба філософа вмістити всю змістову математику у вузькі межі формальної логіки. Водночас ідеї Г. Лейбніца про алгебру логіки на обчислення завдань природознавства знайшли свій вияв у сучасній науці.

1.2.3. Розвиток символічної логіки в XVII–XVIII століттях

Логіко-математичні дослідження братів Бернуллі

Учні Г. В. Лейбніца – швейцарські математики І. Бернуллі (Bernoulli Iohann; 1667–1748 pp.) та Я. Бернуллі (Bernoulli Jakob; 1654–1705 pp.), працюючи над проблемою створення найбільш загальних методів для вирішення широкого спектру математичних завдань, були добре поінформовані про спроби свого вчителя віднайти універсальні логічні алгоритми.

Брати Бернуллі належали до протестантської родини, що постійно переховувалася від релігійних переслідувань кривавого тирана герцога Альби. Я. Бернуллі пройшов курс теологічного навчання, але таємно постійно займався вивченням математики. У 1676 р. він, заробляючи на життя приватним викладанням математики, переїхав у Бордо. З 1681 р. Я. Бернуллі знову прибув до Базеля, де опублікував статтю з теорії комет. В одній зі своїх статей («Acta Eruditorum», 1686 р.) він використав особливо важливий у математиці спосіб міркування – метод повної математичної індукції. У 1687 р. він, читаючи лекції з експериментальної фізики, став професором математики. Крім цього, філософ плідно займався дослідженням завдань комбінаторики. Він використовував термін «перестановка» в розумінні, що відповідає сучасній алгебрі. Я. Бернуллі запровадив термін «інтеграл» для лейбніцівського знака «S». Перебуваючи під впливом вчення Г. Лейбніца, Я. Бернуллі займався також вивченням двійкової системи числення.

Чималі заслуги Я. Бернуллі має в розробленні теорії ймовірності, якій він присвятив свою працю «Ars Conjeet andi» («Мистецтво припущень», 1713 р.). Поряд із поняттям «імовірність a priori» він виділяє поняття «ймовірність a posteriori» (говорячи мовою сучасної математики, розглядає як логічну, так і емпіричну ймовірності), а також обґрунтовує закон великих чисел. За іронією долі Я. Бернуллі помер у той час, коли розпочав писати четверту частину свого «Мистецтва припущень», присвяченого застосуванню теорії ймовірності відносно питання тривалості людського життя.

І. Бернуллі, учитель Л. Ейлера, готувався спочатку до торговельної кар’єри, але під впливом брата незабаром почав вивчати математику та частково – медицину. У 1690 р. І. Бернуллі практикуючи як лікар, відправився до Парижа, де його учнем у галузі математики став маркіз Лопіталь, майбутній відомий математик. У 1695 р., за рекомендацією Х. Гюйгенса, І. Бернуллі зайняв місце професора фізики в Гронингені. З 1705 р. І. Бернуллі перебував у Базелі, де став професором грецької мови й математики.

І. Бернуллі спрямував зусилля на вирішення низки питань, які стимулювали подальше вдосконалення методів математичного аналізу. Зокрема, він представив у математичному журналі «Acta Eruditorum» спосіб побудови окремих диференціальних рівнянь першого порядку. У математичному журналі «Journal de Sfavants» (1697 р.) І. Бернуллі визначив проблему найкоротшої лінії на опуклій поверхні. Важливе місце в працях І. Бернуллі належить тезі про «реальну природу» комплексних чисел, пов'язаній із відмовою від тлумачення останніх лише як зручних фікцій. Він намагався інтерпретувати комплексні числа як дієвий інструмент математичних досліджень, показати логічну правомірність систематичного вживання комплексних чисел.

Брати Бернуллі працювали переважно спільно. На жаль, їх взаємини не завжди були доброзичливими. Так, у 1694–1695 рр. брати особливо різко сперечалися між собою щодо розв'язання низки математичних проблем.

Питанням логіки брати Бернуллі присвятили діяльність, мабуть, ще до того, як їх стосунки різко погіршилися. У 1685 р. вони помітили паралелізм між деякими логічними операціями та алгеброю. Свої спостереження вони виклали в нарисі «Parallelismus ratiocinii logici et algebraici» («Паралелізм логічного міркування та алгебри», 1685 р.). Так, якщо від ідеї більшого порядку відділяєш ідею меншого порядку, то утворюється залишок від першої (різниця). Наприклад, у понятті «людина» окрім поняття «тварина» наявне поняття «розумність». Після виключення поняття «тварина» з поняття «людина» залишається як різниця поняття «розумність». Відповідно, якщо від більшої кількості віднімається менша, то внаслідок операції віднімання залишається відповідна різниця. Зазначена операція виражається знаком «–». Так, наприклад, **а – в** означає різницю між **а** і **в**. Коли дві ідеї, між якими розум убачає згоду, тотожність, або не спільність чи протилежність, поперемінно затверджуються або заперечуються, то як мовне позначення цих стосунків використовують частки «є» і «не є». Процес установлення даних стосунків називається висловлюванням (enunciatio); так, наприклад, людина є твариною; людина не є безрозсудною істотою. Дві величини, між якими розум убачає рівність, зв'язуються знаком рівності («=») у рівняння (aequatio), як, наприклад, **а = в**. З іншого боку, нерівність позначають знаками «<» і «>», як, наприклад, **a < y** або **a > e**.

Операція логічного віднімання в братів Бернуллі визначена не для всіх значень змінних. Не можна, зокрема, від «ідеї меншого порядку» відокремити «ідею більшого порядку». Сказане означає, що у виразі **x – y** термін **y** не може перевершувати терміна **x.** Логічно не інтерпретується різниця **0 – 1,** де **0** – знак брехні, **1** – істини.

Підбиваючи підсумки, зауважимо, що брати Бернуллі розуміють а – у не в сенсі «х & у0», де «&» – знак кон'юнкції, «0» – символ логічного заперечення. Отже, Я. Бернуллі та І. Бернуллі трактують операцію логічного віднімання не як функцію істинності, у тому значенні, у якому, наприклад, є матеріальна імплікація стоїків. Зазначене трактування ускладнювало алгоритмічну обробку виразів, що включали знак логічного віднімання. Тому цілком закономірно, що братам не вдалося створити задовільних логічних обчислень. Наслідуючи Г. Лейбніца, вони констатували аналогію, наявну між законами формальної логіки та методами елементарної алгебри.

Логіко-математичні ідеї Х. Вольфа

Учнем Г. Лейбніца був також відомий німецький філософ Християн Вольф (Christian Wolff), ім'я якого також заслуговує на увагу в межах вивчення раннього етапу в розвитку ідей символічної логіки. Послідовник і систематизатор навчання Г. Лейбніца – Х. Вольф народився 24 січня 1679 р. у м. Бреслау в сім'ї пекаря. Мислитель навчався в місцевій гімназії. Викладачі познайомили його з працями Р. Декарта, а також з опублікованим у 1689 р. дослідженням Г. Лейбніца, Вальтера фон Чирнгаузена «Medicina mentis». У 1702 р. Х. Вольф переїхав до Лейпцига з наміром отримати звання магістра, представивши свій латинський трактат «Про загальну філософію, складену за математичним методом», де він у найбільш суттєвих моментах наслідує Р. Декарта. Паралельно з вивченням праць Р. Декарта Х. Вольф починає опрацьовувати дослідження Г. Лейбніца.

У 1703 р. зазначений філософ, завдяки посередництву Г. Лейбніца, отримав місце лектора в Лейпцигу. Тут він став читати лекції з математики, фізики та філософії. У сфері філософії моралі та права Х. Вольф обстоював початкові тези теорії природного права.

Інтригани-богослови (зокрема пієтисти Франку й Ланге), яким не давали спокою філософські успіхи Х. Вольфа, вичерпавши «наукові» аргументи, почали вдаватися до більш «дієвих» засобів. Вони написали донос на Х. Вольфа королю Фрідріху Вільгельму І. Знаючи слабкі сторони свого правителя, доносчики-богослови роз'яснили королю, що з вчення Х. Вольфа про передвстановлену гармонію (і пов'язаної з цим вченням тези про відсутність свободи волі) витікає, зокрема, що солдати-дезертири не можуть бути визнані винними, оскільки їх дезертирство заздалегідь зумовлене. Король не був знайомий із метафізичними трактатами Г. Лейбніца, проте розумівся на прусській політиці. Рятуючись від королівського гніву, Х. Вольф у 1723 р. утікає до Касселя, де обіймає посаду першого професора філософського факультету в Марбурзі.

Поступово Х. Вольф здобуває світове визнання. Його обирають членом академії в Парижі (1733 р.), Лондоні та Стокгольмі. Петро І пропонував Х. Вольфу пост віце-президента російської академії наук, відкриття якої планувалося тоді в Петербурзі. Світова слава Х. Вольфа справила неабияке враження на прусських правителів. Фрідріх ІІ запросив його зайняти місце віце-президента академії наук у Берліні.

Стиль праць Х. Вольфа зумовлений дедуктивно-геометричним стилем «Етики» Б. Спінози. Мислитель прагне до максимальної ясності викладу, яка в нього межує іноді із сухістю та навіть педантизмом. Філософія, згідно з Х. Вольфом, є загальною теорією можливих речей – об'єктів, мислимих несуперечливим чином (таких об'єктів, з припущення про існування яких не слідує протиріччя). Онтологія аналізує підстави загальних світових зв'язків, математика ґрунтується на категорії виміру, психологія поділяється на емпіричну (у межах якої «душа» досліджується в тісному зв'язку з тілом) та раціональну (відсутність такого дослідження).

Філософська система Х. Вольфа загалом дуалістична й компромісна. Мислитель включив до своєї системи окремі моменти навчань Б. Спінози, Р. Декарта і навіть Д. Локка. Зокрема, вплив останнього полягав у тому, що разом із раціоналістичним методом демонстрації в дедуктивних науках Х. Вольф переконливо підкреслював вирішальне значення індукції та експериментального знання в окремих наукових дисциплінах (наприклад, у фізиці). З іншого боку, проектуючи загальну картину Всесвіту як аналога годинника (машини), Х. Вольф явно наслідував Р. Декарта й французьких матеріалістів.

Подібно до того, як у філософії Х. Вольф прагнув спростити концепцію Г. Лейбніца, так і в логіці спробував адаптувати відповідні погляди свого вчителя, що припали йому до смаку.

Розвиваючи вчення Г. Лейбніца, Х. Вольф підкреслює значення аналітичних пропозицій у математичних і логічних доказах. Аналітичні судження Х. Вольф називає «порожніми пропозиціями», які визначає як «істинні підстави, пропозиції, у яких антецедент співпадає з консеквентом».

Досліджуючи операції з об'ємами понять, Х. Вольф говорить про «сполучення понять» (Verknüpfung der Begriffe), споріднене з операцією поєднання класів. Чимало уваги філософ приділяє тезі про «достатню основу», яку він схильний уважати логічним принципом і вихідним пунктом його метафізики, що виражається в такій формі: «ніщо» не мислимо. Тому все, що існує, повинно мати достатні підстави.

Неабиякий інтерес становить запропонована мислителем класифікація підстав, які використовують у доказах. Зокрема, серед таких підстав він виділяє:

- визначення або тотожні передумови, у яких суб'єкт і предикат, що належать до нього, позначають одне й те саме поняття;
- безперечні дані досвіду (unbezweifelte Erfahrungen), встановлені ретельним і постійним спостереженням за предикатами, що супровжують своїх суб'єктів як їх атрибути або модуси;
- аксіоми та постулати, тобто такі положення, зі змісту яких можна з очевидністю угледіти, суперечить їх суб'єкт своєму предикату чи не суперечить.

Х. Вольф обґрунтовує (хоча й не деталізує) концепцію Г. Лейбніца про «універсальну науку». Мислитель аргументує зв'язок між:

- арифметичними обчисленнями з числами (numerorum in Arith metica);
- перетвореннями алгебри величин (mag nitudinum in Algebra);
- виведеннями силогізму (syllogis morum in Logica).

Він зрештою робить висновок про те, що об'єкти логіки повинні пройти попередню обробку для того, щоб до них можна було додавати методи математичних числень. Але це не більше, ніж констатація тих труднощів, з якими зіткнувся у своїх логічних численнях Г. Лейбніц.

Отже, Х. Вольф загалом доводив взаємозв'язок понять «універсальна наука» та «логічний алгоритм». Водночас обговорення цього питання супроводжувалося неабиякими труднощами, адже відбувалось у контексті найбільш загального завдання – створення універсальної філософської мови.

Учні Х. Вольфа – Більфингер (1693–1750 рр.), А. Баумгартен (1714–1762 рр.), Х. Баумейстер (1709–1785 рр.) та Г. Мейєр (1718–1777 рр.) – пішли шляхом «відшліфовування» теоретичного змісту логіки Г. Лейбніца та Х. Вольфа, а також адаптування наявних логічних вчень до дидактичних цілей.

1.2.4. Становлення ідей числення висловлювань і логіки відношень

Логічне числення Йоганна Генріха Ламберта

Серед низки творчих послідовників логічного вчення Г. Лейбніца найпочесніше місце, безперечно, посідає І. Ламберт. У логічних працях німецького філософа, математика, фізика й астронома XVIII століття наявна розвинена система логічного числення.

Як філософ І. Ламберт мав яскраво виражений синтетичний склад мислення. Його філософська концепція ґрунтувалася на матеріалістичних передумовах. У своєму листуванні з І. Кантом він наполягав на необхідності доповнити раціоналізм Х. Вольфа емпіризмом Д. Локка.

У «Новому органоні» (Лейпциг, 1764 р.) та «Архітектоніці» (Рига, 1771 р.) І. Ламберт здійснив спробу систематичної побудови філософії, яку, користуючись своєрідною термінологією, розділяв на такі чотири частини:

- діанойологія – наука про закони людського розуміння, наближена до психології. Вона вивчає мислення, зокрема специфіку його протікання (актуальне мислення);
- алефіологія – наука про засоби відкриття елементарних понять, а також про закони формування складних понять з елементарних. Так, І. Ламберт є одним із засновників сучасної семіотики як загальної теорії знаків (поза відношенням останніх до об'єктів, які вони позначають).
- семіотика – наука про співвідношення речей та ідей (корелят сучасної логічної семантики як науки про співвідношення знака й позначуваного, формальних систем та їх інтерпретації);
- феноменологія – наука про свідомість як специфічний вид реальності, духовно-емоційного буття, про явища (феномени) свідомості і їх смисли. Водночас це вчення було не тотожне пізнішій суб'єктивістській феноменології Е. Гуссерля або К. Ясперса.

Методологія І. Ламберта є досить змістовною. На особливу увагу заслуговують його ідеї мови науки, яка складається з елементів у вигляді кореневих шарів (Wurzelworte), допустимі комбінації яких мають сприяти формуванню різноманітних понятійних модифікацій. У граматиці мови науки поняття «граматичне» й «логічне» були б синонімами. Але за такого підходу теорія науки перетворюється на фрагмент теорії знаків, що не можна не розглядати як ідейне передбачення семіотики Ч. Пірса.

І. Ламберта, услід за Г. Лейбніцом, уважають одним із засновників логіко-математичних концепцій. Зокрема, він розкрив процедуру розкладання логічних виразів на елементарні складові, здійснив аналіз розділового сполучника «або». Певним недоліком обчислення І. Ламберта є іноді недостатньо обґрунтована екстраполяція математичних методів у галузі формальної логіки. Окрім символічних класів, його логіка включала також знаки співвідношення.

Логічне обчислення І. Ламберта є досить складним для викладу та інтерпретації. Його мова та наявні в ній прийоми легко можуть здатися сучасному читачеві надто штучними та необґрунтованими. Так, разом із позначеннями для змінних і позначеннями для зв'язку І. Ламберт уводить у власне числення числові коефіцієнти, знаки для дробів та інші елементи, які неможливо інтерпретувати в логіці. Водночас результати досліджень І. Ламберта більше наближені до сучасної форми символічної логіки, ніж, наприклад, обчислення Г. Лейбніца.

І. Ламберт розрізняє два види символів:

- символи для логічних класів або понять («Zeichen der Begriffe»);
- символи для позначення логічних операцій («Verbindungskunst der Zeichen»).

Водночас поняття поділяються на три групи:

- відомі поняття (символізуються першими буквами латинського алфавіту: a, b, з, d, ...);
- невизначені поняття (зображуються серединними буквами того ж алфавіту: m, n, ...);
- невідомі поняття (позначаються останніми буквами латинського алфавіту: x, y, z, ...).

Уведення невизначених понять було викликане розглядом разом із прямими логічними операціями зворотних логічних операцій, що відрізняються певною невизначеністю. Розмежування відомих і невідомих понять І. Ламберт здійснив, керуючись аналогічним підрозділом змінних в алгебрі.

Основою обчислення слугують такі чотири операції:

- комбінування («Zusammensetzung»);
- ізоляції («Isolierung»);
- визначення («Bestimmung»);
- абстрагування («Absonderung»).

Зазначені операції вважаються за своїми формальними властивостями аналогічними, хоча й не тотожними, відповідно до арифметичних операцій додавання, віднімання, множення та ділення. У своїх працях І. Ламберт стверджує, що операція комбінування є взаємооберненою відносно операції ізоляції, а операція визначення, відповідно, є взаємооберненою стосовно абстрагування, тобто аналогічно до того, як в арифметичній алгебрі взаємооберненими є операції додавання та віднімання, а також ділення й множення.

Отже, у логічному численні І. Ламберта йдеться про дві прямі (комбінування, визначення) та дві зворотні (ізоляція, абстрагування) операції.

Визначимо комбінування як логічне додавання (І. Ламберт позначає його знаком «+»). Представимо визначення як логічне множення (І. Ламберт позначає його знаком «*», іноді вживаючи його між буквами). Відповідно, операцію ізоляції слід іменувати логічним відніманням (символічно a – b), а операцію абстрагування – логічним діленням (символічно a / b).

У логіці пропозицій І. Ламберта вираження «a+b» становить строгу диз'юнкцію. У численні класів воно характеризує симетричну різницю (об'єднання класів із виключенням їх загальної частини). Формули виду a / b є диз'юнктивними пропозиціями, що не вимагають геометричної ілюстрації, адже не виражають собою нічого позитивного. Іншими словами, логік розглядав у диз'юнкції лише випадок альтернатив, що виключають.

Операцію «–» у виразі «a – b» він тлумачив як скорочення для словосполучення: «ті a, що відмінні від b». І. Ламберт помічає, що a – b логічно інтерпретується лише за умови, що b не перевершує a.

Операцію логічного ділення він описує як операцію обернену відносно операції логічного множення. Іншими словами, вираз x = a / b він розуміє як рівнозначний зі співвідношенням b * x = a.

Подібно до того, як в арифметиці вираз a / b можна тлумачити як те, що означає певне число, яке, будучи помноженим на b, дає a, – у логіці класів І. Ламберта вираження a / b означає той клас предметів, перетин якого з b утворює клас a.

Детально не вдаватимемося до аналізу труднощів, пов'язаних із трактуванням операції логічного ділення, підкреслимо лише, що, по-перше, операція a / b має сенс лише за умови, що a не перевершує b; по-друге, цій операції притаманна відома невизначеність.

Цю невизначеність проілюструємо на конкретному прикладі: нехай a = b = 0 (знак «0» позначає порожній клас), тоді вираження 0/0 невизначено в тому сенсі, що означає будь-який клас відносно 1 – 0 = 0. Разом із записом логічного ділення у формі a / b І. Ламберт використовує також його запис у вигляді a, що ділиться на b.

Окрім символів, для зазначених вище операцій І. Ламберт використовує також інші знаки співвідношення:

- рівності («=»), що скорочено позначає зв'язку «є», вказуючи на тотожність;
- нерівності («– =»), що символізує вираз «не є» (заперечення в судженні стосується його зв'язки).

Мислитель обґрунтовує булевий закон ідемпотентності x – x = x, який, водночас, не мав у його вченні універсального значення, оскільки його числення, окрім символів класів, передбачали ще й знаки співвідношення.

І. Ламберт вживає також надзвичайно цікаву систему позначень. Вона включає знаки постійних 1 і 0, де 1 інтерпретується як наявність, а 0 як відсутність певної якості. Він записував конституанти одиниці у формі: ABC, AB0, A0C, 0BC і так далі, де розміщення знака 0 на відповідному місці означає, що на цьому місці повинна стояти належна (узята в словниковому порядку) буква із символом заперечення. І. Ламберт визначає також число конституант одиниці в кількості 2n, де n – кількість букв, що означають елементарні класи.

Отже, наслідуючи вчення Г. Лейбніца, І. Ламберт обґрунтовує геометричну інтерпретацію силогізму функторів. У межах цієї інтерпретації кожному термінові відповідає відрізок прямої.

Створюючи власну узагальнену теорію силогізму, І. Ламберт усвідомлював, що вона не може претендувати на охоплення всіх видів наукових висновків. Складність застосування формалізації І. Ламберта до аналізу традиційних проблем змістової логіки полягає, зокрема, у тому, що він не розглядав числення висловлювань як окремий самостійний фрагмент своєї теорії.

О. де Морган – засновник логічної теорії відношень

Хоча витоки обчислення відношень сягають вчення І. Ламберта, проте саме англійського логіка та математика Огастеса де Моргана можна вважати справжнім засновником логічного аналізу відношень. Влучним у цьому контексті є висловлювання американського математика й логіка Ч. Пірса про те, що саме О. де Морган був «батьком логіки відношень».

Наукові переконання О. Де Моргана формувалися під впливом ідей школи «кембриджських символістів», активним членом якої він був. Представники цієї школи займалися вивченням незвичайних числових систем, одну з яких мислитель екстраполював у галузі логіки.

О. де Морган чітко усвідомлював операційний характер символіки алгебри та був твердо переконаний у можливості побудови алгебри, відмінної від загальноприйнятої алгебри відношень.

Однією з передумов становлення символічної логіки в Британії 40-х років XIX століття була та обставина, що найбільш видатні англійські логіки цього періоду (Джоуль Буль, О. де Морган) були математиками, які працювали у сфері операційного числення. Сутність останнього полягала в тому, що символи операцій відділялися від функцій і над ними виконувалися математичні дії, як над числами або над функціями. Наслідком цього було співвідношення між символами операцій, яке переходило в співвідношення між функціями. Символам операцій згодом повертався їх первинний сенс. Така логіка слугувала надійним джерелом для операційного числення британських математиків.

О. де Морган не приділяв філософським питанням логіки особливої уваги. На думку науковця, необхідного зв'язку між іменами та предметами не існує. Справа не в тому, що реальне визначення завжди має своїм предметом річ, а номінальне – лише ім'я. Англійський математик стверджував, що реальне визначення – це таке тлумачення значення слова, якого вистачає для відмежування предмета, що іменується цим словом, від усіх інших предметів.

У методологічному контексті О. де Морган зосереджується на узагальненні Аристотелівської теорії форм висловлювань, вживаючи знак логічного заперечення не лише щодо предиката судження, а й стосовно його суб'єкта.

О. де Моргану належить також ідея трактування заперечення поняття як доповнення до існуючого «універсуму міркування» (аналог сучасного поняття про універсальний клас). Зазначене поняття, що надалі почало відігравати таку важливу роль у логічних системах Дж. Буля та П. Порецького, також було запроваджено О. де Морганом.

Доповнення до цього класу він розглядав як сукупність предметів, відсутніх у цьому класі, але відмежованих разом із останніми межами певного універсального класу, що виділяється (за допомогою нелогічних критеріїв) зазвичай для системи понять певної наукової дисципліни або її окремого фрагмента.

Важливе місце в логічних дослідженнях філософа належить також вивченню виведень із кількісно визначуваних пропозицій, що не вкладаються в межі силогізму. О. де Морган аналізує такі висновки вслід за І. Ламбертом.

Елементарним прикладом цього типу висновків може слугувати такий висновок: 60 % суть Pi, 70 % суть PZ.

Отже, принаймні 30 % суть одночасно і Pi, і PZ. Констатуючи, що з посилань «велика частина M є P» і «велика частина M є S» витікає: «деякі S суть P», О. де Морган доходить висновку про обмеженість сфери дії традиційного правила: «з приватних посилань ніщо не слідує». Конкретизуючи поняття приватного посилання, О. де Морган запроваджує поняття «чисельно визначувані судження» (такі, наприклад, як «27 (чи більше) S належать до числа 50 P»; «жодне з 27 (чи більше) S не належить до числа 50 P» тощо). Він розглядає комбінації з таких суджень, встановлює деякі формальні критерії для висновків, що складаються з них. Таким чином, будується логіка оперування з приватними посиланнями.

Вихідним положенням концепції О. де Моргана в контексті реформування класичної логіки був його аналіз проблем трактування зв'язку в судженнях. На думку науковця, зв'язку слід розглядати як носія відношень. Нескінченна безліч останніх не може перешкоджати формальному аналізові типів зв'язок, що виражають їх, для виявлення загальних властивостей зв'язок. Ці властивості є властивостями типу симетричності, транзитивності й інших. Їх опис, аналіз видів відношень потребували від О. де Моргана побудови розвиненої символічної мови, що розрізняла об'єкти (позначаються буквами X, У, Z, …) і відношення (позначаються буквами L, M), а також знаки для логічних функторів, які в різних працях О. де Моргана зображуються по-різному.

Мислитель відмовляється визнавати елементарний тип висловлювання таким, що зводиться до Аристотелівського представлення «X є (не є) Y», а, навпаки, уважає, що елементарне судження має структуру X.LY. Це означає, що X є предметом мислення, який перебуває відносно L до Y, іншими словами, що X є L від Y.

Алгебра відношень О. де Моргана включала наступні шість основних операцій:

- **MN'** (логічна сума відношень M і N);
- **MN** (логічне відтворення тих самих відношень);
- **n** (операція отримання додаткового для N відношення);
- **N'1** (операція отримання зворотного відношення або конверсії N);
- **M / N** (операція породження відносної суми відношення M і N);
- **M (N)** (операція породження відносного відтворення відношень M і N або «композиції» тих самих стосунків).

Саме О. де Морган був ініціатором застосування логічних числень до обґрунтування теорем теорії ймовірності, випередивши аналогічне прагнення Дж. Буля. Завдяки цьому мислитель хотів продемонструвати придатність власного числення, поняття якого він передусім «перекладає» теоретико-ймовірною мовою. Наприклад, він проводить паралель між поняттями відносного відтворення відношень та умовної ймовірності.

Таким чином, праці О. де Моргана не були належним чином оцінені його сучасниками. Складна та не завжди однакова символіка відлякувала численних читачів, схильних прагматично очікувати від нової теорії негайних практичних застосувань. Основне історичне значення системи науковця зводиться переважно до того, що вона стимулювала розвиток алгебри відношень Ч. Пірса та стимулювала Дж. Буля до створення числення класів, яке в О. де Моргана було представлено явно недостатньо.

1.2.5. Числення класів Джорджа Буля

БІОГРАФІЯ ДЖ. БУЛЯ

Джордж Буль народився 2 листопада 1815 року в м. Лінкольні. Він здобув мінімальну освіту. Після закінчення початкової школи Дж. Буль тимчасово відвідував комерційне училище. Комерція не спокусила юнака, і він вирішив залишити училище. Водночас у нього назріло бажання стати освіченою людиною. Так, він відвідував уроки латинської мови, які Дж. Буль брав у книгопродавця Уільяма Брука, що став його близьким другом. Допитливий юнак самостійно вивчає грецьку, а пізніше – німецьку та французьку мови за книгами, які він брав у свого приятеля. У 14-річному віці Дж. Буль виконав віршований переклад твору старогрецького поета Мелеагра «Ода весні». Цей переклад був надрукований в одному з лінкольнських видань. Дж. Буль став відтепер ще наполегливішим у своєму прагненні до самоосвіти.

У. Брук дивувався працьовитості юнака, що не давала «припадати пилом» книгам на його полицях. Згодом 16-річний Дж. Буль стає асистентом учителя в приватній школі м. Донкастера, поєднуючи обов’язки лаборанта та вахтера. Даремно не витрачаючи часу, 17-річний лаборант розпочав систематично вивчати математику.

У 1833 р. Дж. Буль залишає школу в Донкастері та обіймає аналогічну посаду в школу передмістя Лінкольна – Ваддингтона. Тут він стає головним педагогом, а в 1840 р. засновує власну школу в

Лінкольні. Діапазон наукових інтересів Дж. Буля досить широкий. Його цікавили математика та логіка, етика Б. Спінози, філософські праці Аристотеля, М. Цицерона. Водночас поступово Дж. Буль дедалі більше схиляється до проблем додатка математичних методів до гуманітарних галузей (однією з таких галузей на той час уважалася й логіка). Науковець прискіпливо вивчає «Математичні засади натуральної філософії» Ньютона та «Аналітичну механіку» Ж. Лагранжа, порівнюючи методи обох учених. Він захоплювався здатністю Ж. Лагранжа вирішувати фізичні питання як суто математичні. Зазначена обставина змусила Дж. Буля замислитися над можливістю абстрагування від фізичних явищ та їх вербального вираження, переходу до системи ефективно побудованих символів, які мали б певну самостійність, і з якими можна було б працювати за законами, що внутрішньо властиві символам.

Дж. Буль листується з кембриджськими математиками, які констатують оригінальність математичних ідей свого кореспондента, радячи їх обов’язково опублікувати. Дослухавшись до наполягань своїх нових друзів, науковець у 1844 р. отримує золоту медаль за свої праці в царині математичного аналізу. У 1849 р. кембриджські друзі – математики організовують Д. Булю математичну професуру в щойно відкритому коледжі в місті Корке (Ірландія). Претендент був затверджений на посаду попри те, що не мав університетської освіти.

Математичним дослідженням Дж. Буля притаманне ретельне вивчення «символічного методу» («symbolical reasoning»). Англійський логік уважав, що математичні операції (зокрема диференціювання та інтеграцію) слід, передусім, вивчати з точки зору властивих їм формальних властивостей, що дає можливість перетворювати вирази, які передбачають ці операції, незалежно від внутрішнього змісту таких виразів.

Звернення Дж. Буля до вивчення логіки значною мірою стимулювала дискусія між О. де Морганом та У. Гамільтоном, за якою він із цікавістю спостерігав навесні 1847 р. Мислитель сам відмічає цю обставину в передмові до праці «Математичний аналіз логіки», написаній в жовтні 1847 р. Він визнає також, що О. де Морган був першим логіком, який звернувся до аналізу кількісно визначуваних (numerically definite) речень.

Крім логічних і математичних досліджень, Дж. Буль продовжував писати поетичні твори, класичні за формою та філософські за змістом. Йому належать два вірші – «Сонет до числа три» і «Звання мерця». У його рукописах знайшли також віршований лист до У. Бруку, датований

1845 р. У цьому листі було описано його візит на засідання Британської наукової асоціації, а також свято на острові Уайт.

Дж. Буль помер через 10 років після того, як було опубліковано його основний логічний твір «Закони думки». Рукописи, які він залишив після себе, свідчили про його намір продовжити дослідження логічної теорії. Починаючи з 1854 р. Дж. Буль зосередив свої зусилля на розробленому ним численні в межах теорії ймовірності, не публікуючи праць, що безпосередньо стосуються логіки. Водночас наукова діяльність Дж. Буля у сфері математики завжди була лише допоміжною та стимулювалася його роздумами про логіку, навіть коли він почав в останній період своєї творчості доходити думки про те, що логіка не залежить від математики й повинна слугувати її підґрунтям.

Філософ запропонував власну інтерпретацію числення класів для теоретико-ймовірнісних потреб. Імовірність класу **1** дорівнює **1.** Імовірність додаткового до **x** класу **1 – x** є ймовірністю класу 1 мінус імовірність класу x. Імовірність класу **x + y** є сумою ймовірності класів **x** і **y.** Імовірність класу **x * y,** де x та y незалежні, є відтворенням імовірності x та y.

Методологічні ідеї Дж. Буля

Питання про методологічні переконання Дж. Буля є досить складним. Здебільшого про них судять, ґрунтуючись лише на ранніх висловлюваннях філософа. Аналізуючи їх, зазвичай доходять висновку про те, що постать логіка можна розглядати як попередника математичного формалізму Д. Гільберта.

Науковець стверджував, що в символічній алгебрі правильність процесу аналізу залежить не від інтерпретації наявних у ньому символів, а лише від законів їх комбінування. Кожна система інтерпретації, яка не порушує істинності стосунків, є рівноправною. Завдяки цьому один і той самий прийом може, стосовно схеми інтерпретації, сприяти вирішенню питання відносно властивостей деяких чисел, що розглядаються одне відносно іншого, якщо йдеться, наприклад, про математичне завдання, або ж стосовно певного третього об'єкта (якщо йдеться, наприклад, про динамічні або оптичні завдання).

На думку Дж. Буля, перетворення логіки на строгу науку можливе завдяки трактуванню її предмета засобами математичного апарату. У праці **«Математичний аналіз логіки»** він зазначав, що, керуючись принципом правильної класифікації, доцільно пов'язувати логіку не з філософією, а з математикою.

Концепції Дж. Буля притаманне визнання існування законів думки як об'єктивних співвідношень, що не залежать від волі суб'єкта пізнання. Він стверджував, що закони міркування об'єктивно існують як закони людського мислення. Тому переконання в царині науки логіки повинні мати матеріальне джерело.

Згідно з Д. Булем, логіка загалом покликана пролити світло також на з'ясування природи інтелектуальних здібностей. Звідси можна лише зробити висновок, що він не ігнорував практичний аспект логічних досліджень. Особливе значення в цьому контексті набуває, на його думку, розкриття природи висновку. Виклад логіки у формі числення є не довільним актом, а наслідком тотожності формальних особливостей логічних перетворень і математичних операцій. З іншого боку, неправильна думка про те, що предмет математики обмежується лише поняттями числа й кількості. Науковець переконує, що вивчення ідей числа та кількості не є сутністю математики.

Побіжно розглянемо вчення Дж. Буля про мову. Так, він розрізняв живу розмовну мову та символічну мову як сукупність певних символічних засобів і способів оперування ними, наявних у точних науках. Обидві мови слугують інструментами людського міркування, що розняться лише мірою суворості й визначеності. Водночас Дж. Буль був глибоко переконаний у тому, що, вивчаючи закони знаків символічної мови, ми насправді пізнаємо засадничі закономірності міркування. На його думку, закони мислення відображаються в законах операцій із логічними символами, які вводять лише як допоміжний засіб для вивчення дійсного мислення та власне законів мислення.

ОСНОВНІ РИСИ ЛОГІЧНОЇ СИСТЕМИ ДЖ. БУЛЯ

Основними операціями в логіці Дж. Буля є:

1. Додавання, що позначалося в нього знаком «+» в численні класів. Булевій формулі **x + y** відповідає поєднання класів x і y з виключенням їх спільної частини. В обчисленні висловлювань це чітка диз'юнкція. Через поєднання (відповідно, диз'юнкцію) «**V**», перетин (відповідно, кон'юнкцію) «**Λ**» і доповнення (відповідно, заперечення) «–» булівське додавання може бути виражене таким чином:

   x + y = sy V xÿ

2. Множення, що позначалося знаком «*» або просто записом одного виразу поряд з іншим (без знаків між ними); у численні класів

цій операції відповідає перетин, у численні висловлювань – кон’юнкція.

Нероздільне «або» може бути виражене через булівське додавання за допомогою таких двох формул: ***x V y;***

x + y + + xy;

x V y.

3. Додавання х до одиниці (відмітимо, що 1 – означає «істина», 0 – «брехня»), що позначалося записом **«1 – х»;** у численні класів формула **1 – х** означає доповнення до класу х; у численні висловлювань – заперечення х.

Основним відношенням, уживаним у логічній системі Дж. Буля, є відношення рівності. За посередництва цього відношення визначаються в ній інші стосунки і, передусім, з його допомогою визначається відношення включення для класів. Дж. Буль користується декількома визначеннями відношення введення. Одне з них свідчить: ***(xy) = (x (1 – y) – 0),*** де 0 є символом нульового (порожнього) класу.

Дж. Буль з’ясовує властивості введених ним операцій, визначаючи:

комутативний закон множення: **x*y = y*x**

асоціативний закон множення: **z*(y*x) = (x*z)*y,** а також аналогічні закони для операції логічного додавання.

Дж. Буль також формулює:

дистрибутивний закон множення відносно додавання: ***z*(x + y) = z*x + z*y,***

дистрибутивний закон множення ***z*(x – y) = z*x – z*y.***

Основними властивостями рівняння Дж. Буль уважає такі його властивості: якщо ***x = y, то z*x = z*y*** і якщо х ***= y, то z + x = z + y.***

Істотна відмінність між логікою та алгеброю полягає в тому, що в логіці завжди наявний закон

x*x = x (принцип ідемпотентності).

Водночас в алгебрі рівняння ***x2 = x*** виявляється правильним лише за умов, що ***x = 1*** або ***x = 0,*** що є коренями рівняння

x2 – x = 0.

Таким чином, Дж. Буль помічає, що якщо уявимо собі алгебру, у якій символи допускають різні значення 0 і 1, але лише ці значення, закони, аксіоми і перетворення в такій алгебрі будуть тотожні в усьому своєму об’ємі із законами, аксіомами та перетвореннями алгебри логіки. Слід припустити, що основні об’єкти, стосунки й операції логіки виражені за допомогою символів, що задовольняють закони елементарної алгебри до нуля й одиниці. Дж. Буль робить висновок, що на окремих етапах обчислювальних процедур алгебри логіки можна, нехтуючи безпосередньою логічною інтерпретацією символів, що фігурують у них, розглядати останні як кількісні знаки, з якими можна оперувати відповідно до звичайних правил алгебри для 0 і 1.

У цьому полягає основний принцип логічного обчислення Дж. Буля, що, на його думку, виражає формальне узгодження, наявне між кількісною алгеброю та алгеброю логіки, незважаючи на відмінність об'єктів дослідження цих двох дисциплін.

Особливу увагу науковець приділяє вивченню логічних функцій та операцій із ними. Він не визначає спеціально, що таке логічна функція, констатуючи лише, що у виразах виду ***f (x), f (x, y)*** й інші символи x, y... можуть розглядатися як логічні знаки, що передбачають значення лише 0 та 1.

Обчислення класів Дж. Буля фактично передбачає систему понять звичайної змістовної логіки, таких, як «логічний наслідок», «виведення» та інше. Трактуючи алгебру як науку про рівність, Дж. Буль у численні класи також записує логічні вирази у вигляді рівняння. Він прагне давати повні явні визначення, з яких можна було б вивести всі властивості визначуваного об'єкта. Висловлюючись сучасною мовою, це відповідає спробі замінити аксіоматичні визначення явними.

Аналогічно ж з алгеброю (арифметичною) Дж. Буль ставить також проблему про виключення яких-небудь термінів із заданих логічних рівнянь (проблема елімінації). Суть цієї проблеми полягає в такому: нехай є яке-небудь співвідношення, що містить певні класи x, y, z. Вимагається вивести з цього співвідношення нове співвідношення, еквівалентне кон'юнкції всіх таких наслідків із цього співвідношення, які містять лише які-небудь визначені з класів x, y, z..., – встановити, що можна сказати про співвідношення між класами на підставі відомостей, що містять, окрім цих, також й інші класи.

Підбиваючи підсумки, слід зауважити, що логічні досягнення Дж. Буля не були сприйняті його сучасниками, які не змогли осягнути сенсу булівської операції додавання, уважаючи загалом логічну систему науковця штучною та довільною. Така позиція є цілком закономірною, оскільки і сам учений не уявляв собі зв'язку операції строгої диз'юнкції із додаванням двох модулів, хоча фактично й користувався арифметикою. На думку окремих критиків творчості логіка (наприклад, П. Порецького), Дж. Буль іноді просто підганяв логічні операції під арифметичні, не розкриваючи справжнього секрету успіху свого методу та не розібравшись у тому, якою мірою та власне чому він використав аналогії.

1.2.6. Філософсько-логічні засади теорії множин Г. Кантора

Теорія нескінченних упорядкованих великих множин була розроблена в останній третині XIX століття в працях Г. Кантора. Вона відразу ж привернула до себе увагу математиків і логіків. Її принципи в різних аспектах аналізували Р. Дедекінд, Г. Фреге, Ф. Клейн, А. Пуанкаре, А. Марков, Д. Гільберт, Б. Рассел та ін. Ідеї в контексті відносно нової логіко-математичної теорії висловлювалися найрізноманітніші. А. Пуанкаре писав: «Актуальної нескінченності немає, і коли ми говоримо про нескінченну сукупність, то маємо на увазі наявність у неї такої властивості, з огляду на яку до неї без кінця можна додавати нові елементи»[39]. Значна міра абстрактності й універсальність поняття великої кількості призвела до труднощів, добре відомих у межах філософії під час роботи з універсаліями. Це виразилось у появі теоретико-множинних парадоксів, сформульованих Б. Расселом. На його думку, жодна множина не може містити елементи, що визначаються в термінах власне множини. Навпаки, Ф. Клейн висловив думку, що математика після створення канторівської теорії нескінченних множин збагатилася ідеєю про те, що рахунок є окремим випадком процесу встановлення взаємоодназначної відповідності між елементами значних кількостей.

До ідей теорії множин, як зазначає Ф. Медведєв, у XIX столітті зверталися чимало математиків, проте найбільше – Р. Дедекінд. Для Г. Кантора безпосереднім стимулом до теоретико-множинних досліджень стало його зайняття теорією тригонометричних рядів. Після того, як він довів теорему єдиності представлення функції тригонометричним рядом загального вигляду, що сходиться до неї на відрізку, його зацікавило питання можливості узагальнення теореми в разі, коли ряд співпадає в усіх точках відрізка[40].

Розкриємо філософсько-логічні підстави теорії множини Г. Кантора. Осмислення змісту філософських категорій континуального, дискретного характеру, що сформувалися в античності, середньовічній культурі, епоху Нового часу, дало змогу німецькому математикові сформулювати теорію нескінченних упорядкованих множин, або трансфінітну арифметику. Спробуємо, по-перше виявити взаємозв'язок

[39] Пуанкаре А. О науке. / А. Пуанкаре – М. : Наука, 1983. – 559 с. – С. 451.

[40] Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке / Ф. А. Медведев – М. : Наука, 1965. – 218 с. – С. 8-12.

філософсько-логічних і математичних аспектів його теорії, по-друге, продемонструвати, що аксіоми й теореми, сконструйовані Г. Кантором, вплинули на сучасні логіко-математичні та математичні теорії і концепції.

Ідеї теоретико-множинного пояснення діалектичних і математичних побудов імпліцитно були присутні в працях мислителів античності й середньовіччя. У діалогах Платона «Парменід», «Філеб» (до останнього безпосередньо звертається Г. Кантор), такі ідеї можна виділити під час аналізу з'ясування античним мислителем суті «єдиного». У «Парменіда» в межах визначення абсолютного та відносного значення єдиного Платон виголошує вустами Парменіда фразу: «А будучи більше або менше тих величин, з якими воно сумірно, воно в порівнянні з меншими міститиме більше заходів, а в порівнянні з великими – менше»[41], сенс якої може бути інтерпретований як основа теореми про лінійні точкові множини, та й увесь діалог Аристотеля та Парменіда, що стосується з'ясування уявлень про єдиний, нагадує положення загального вчення про множини Г. Кантора.

У платонівській діалектиці єдиного й іншого, наявній у «Парменіді», представлено декілька видів єдиного. Перший – протилежний будь-якій множині. Другий є поєднанням множинного, його Платон називає «єдине існуюче». Третій вид єдиного – це одиниця, з якої розпочинається відлік, і яка протилежна будь-якому іншому числу. Платон визначає єдине і як безмежне, нескінченне, незмінне. Ідея про єдине, що перебуває в «собі самому», ґрунтується на визначенні відношення цілого й частини. Платонівський Парменід говорить про «хитромудру гру». Спочатку він береться довести наявність єдиного, а потім – відсутність. У бесіді з Аристотелем він стверджує, що зміна з буття в небуття випробовує не «єдине існуюче», а передбачуване «єдине неіснуюче».

У контексті вчення про «єдине» можна інтерпретувати ідею межі. Єдине постійно змінюється. Переходячи від «було» до «буде», воно зустрічається з «тепер» як межею між минулим і майбутнім. Поняття «тепер» і «раптом» Платон ототожнює, оскільки «раптом» є точкою, від якої відбуваються зміни в один чи інший бік. «Раптом» є початком відліку.

Г. Кантор безпосередньо не аналізує платонівське обґрунтування єдиного в діалозі «Парменід», але розглянуті нами визначення, представлені в ньому, дають змогу краще зрозуміти категорії «єдиного» та «багато чого» у «Філебі», до якого звертається німецький математик

[41] Платон. Соч. в 4-х т. Т .2 – М. : Мысль, 1993. – 526 с. – С. 366.

у статті «Про єдину властивість усіх дійсних чисел». У ній показано, що сукупності як раціональних, так і алгебричних чисел підпадають під єдине поняття рахункових множин. Лише після доказу того, що існують і цілком певні «численні» математичні множини, поняття рахунку отримує в Г. Кантора сенс і значення. Платон у «Філебі» порівняльну характеристику задоволення й розуміння розпочинає з аналізу категорій єдиного та багато чого. Античний філософ згодом замінює ці категорії з посиланням на Божественне одкровення на категорії безмежного та межі. На думку Г. Кантора, число в діалозі «Філеб» визначене як синтез межі та безмежного. Граничне, описуване Платоном у «Філебі», розглядається німецьким математиком як обмеження (межа) множинності. Межу усвідомлюють як «упорядковану сукупність» різних множин.

Осмислюючи зміст філософських категорій єдиного та багато чого, Г. Кантор трактує множину в платонівському контексті, розглядаючи його як низку абстрактних об’єктів інтуїції. Множина постає як клас, сукупність об’єктів будь-якої якої природи. Істотно передусім те, що збори об’єктів розцінюються як один об’єкт (мислиться як єдине ціле). Кожен елемент множини розглядається з позиції ознак, що утворюють зміст певного поняття. Платон математичним об’єктам приписує самостійне існування, вони розглядаються як побудови розуму, який, використовуючи діалектичну здатність, «не видає свої гіпотези за щось первинне, навпаки, вони для нього – лише припущення, тобто деякі підступи та розсуд до початку всього, яке вже не є ймовірним»[42]. Знання філософії та математики, за Платоном, належать до постійних і вічних ейдосів, до яких дослідники сходять від гіпотез.

Число в Платона постає як кількісний знак, математичний образ та ейдетичний символ. Сенс ейдетичного числа філософ вбачає в тому, що воно – ідея, яка породжує модель буття й пізнання. Можна з достатньою впевненістю екстраполювати наше пояснення числа в Платона й Аристотеля на ідею множин Г. Кантора, що розкривається у вигляді знака й образу, в онтологічному та гносеологічному контексті виступає як пізнана змістовність образу. Так, «числам можна приписувати реальність настільки, наскільки їх можна розглядати як вирази чи відображення процесів і стосунків у зовнішньому світі…»43.

Для Г. Кантора математичні об’єкти (числа, побудовані числові множини) – це особливий спосіб ставлення до буття як природи, за

[42] Платон. Соч. в 4-х т. Т. 3 – М. : Мысль, 1994. – 654 с. – С. 319.
[43] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 79.

якого чуттєво сприймане мислиться у вигляді нескінченних числових рядів. Множину логік визначає не лише як знакові позначення, а й як структуру та зміст. Наприклад, ν – актуальна нескінченна множина всіх позитивних чисел, μ +νi – множина всіх комплексних чисел. Водночас μ і ν набувають незалежно один від одного всіх цілочисельних позитивних значень.

При конструюванні поняття трансфінітного, або створеного актуально нескінченного німецький математик аналізує ідеї континуального та дискретного обґрунтував Аристотель у творах «Фізика», «Про небо». «Якщо ми звернемося до історії, – пише Г. Кантор, – то побачимо, що погляди на нескінченне висловлювалися часто, і що вони зустрічаються також в Аристотеля. Аргумент, висунений Аристотелем проти реальності нескінченного, полягає у твердженні, що якби існувало нескінченне, то кінцеве було б зруйноване»[44].

Під час побудови трансфінітної арифметики німецький математик детально вивчав переконання Августина Блаженного щодо нескінченності й упорядкованості, висловлені в трактаті «Про град Божий». Так, Августин Блаженний пише: «Усе, що вимірюється знанням, обмежується свідомістю того, хто пізнає; так само і кожна нескінченність буває деяким непрореченим чином обмеженою в Бога, адже недосяжна для його бачення»[45]. На думку Г. Кантора, відсутність кінцевого, про яке говорить Августин Блаженний, доводить, що сукупність усіх кінцевих чисел, що розглядається як «річ для себе», актуально нескінченна множина Transfinitum, яка виявляється в природі всюди, щоб виразити досконалість її творця. Будь-яку, навіть найменшу частку матерії, слід розглядати як світ, заповнений багатьма різними творіннями. Розумному визначенню доступно все, як кінцеве, так і безперечно нескінченне, за винятком Бога.

Г. Кантор під час побудови трансфінітної арифметики досліджував традиції осмислення континуального – дискретного не лише античності і середньовіччя, а й Нового часу. «Розмірковуючи про традиції, я розумів їх не у вузькому сенсі особисто пережитого, а зважав на засновників нашої філософії та природознавства»[46]. Німецький математик розглянув уявлення про нескінченність, розроблені Ф. Беконом, Р. Декартом, Б. Спінозою, Г. Лейбніцом, Г. Галілеєм,

---

[44] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 72-73.

[45] Августин А. Соч. в 2-х т. Т. 1. О Граде Божьем к Мерцелину против язычников. – Киев : Типография И. И. Чоколова, 1906. – 472 с. – С. 286.

[46] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 74-75.

впритул наблизившись до ідеї трансфінітних множин, водночас уважаючи її помилковою. Вона суперечила його уявленням, представленим у роботі з кінцевими рахунковими множинами. У «Бесідах і математичних міркуваннях» аналізуються два ряди нескінченних натуральних чисел:

1, 2, 3, …n, …,

1, 2, 9, …n2, …,

перший містить натуральні числа, а другий – квадрати цих чисел.

Г. Галілей визначив, що загальна кількість усіх чисел – ряду, що містить натуральні числа, і ряду, що містить їх квадрати, – більше, ніж одних лише квадратів, або ряду, що містить натуральні числа. «З іншого боку якщо запитати, скільки цих квадратів, то можна справедливо відповісти, що їх стільки ж, скільки існує коренів, адже кожен квадрат має корінь, який має свій квадрат»[47]**.** Формулюється твердження, що спирається на ідею взаємної та поелементної відповідності двох множин, що поелементно співвідносяться між собою. У працях Г. Кантора саме так формулюється поняття функції, тобто поелементного співвіднесення (відображення) двох множин за допомогою деякого коефіцієнта. Г. Галілей відкидає можливість безмежної побудови множин, заданих з усіма своїми елементами. На його думку, рівність двох множин неможлива в нескінченності.

Загальна думка філософів і математиків Нового часу відносно нескінченного була така, що під час аналізу доводиться мати справу лише з фінітними, але не трансфінітними класами як нескінченно великих, так і малих змінних. Обґрунтувавши з філософської позиції роботи з теорії множин, Г. Кантор писав: «Я точно знаю, що розглянута мною тема, завжди була об’єктом найрізноманітніших думок і тлумачень і що ні математики, ні філософи не дійшли цілковитої згоди. Тому я … не можу остаточно розв’язати проблему нескінченності»[48]**.**

Теоретико-множинні побудови Г. Кантора зумовлені тими суперечливими результатами, які виникли в численні нескінченно малих і спонукали Г. Лейбніца та інших математиків і філософів Нового часу обчислювати нескінченно малі як неподільні величини. Г. Лейбніц у «Нових дослідах про людське розуміння автора системи передвстановленої гармонії» розглядав нескінченно малі не як реально існуючі, а як фіктивні величини. Німецький філософ намагався обґрунтувати взаємовиключні властивості нескінченно малих, використовуючи принцип безперервності. «Ніщо не відбувається

[47] Галилей Г. Избр. Труды. В 2-х т. Т. 2. – М. : Наука, 1964. – 428 с. – С. 141.

[48] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 64.

відразу, і одне з моїх головних і найбільш достовірних положень – це те, що природа ніколи не робить стрибків»[49].

Поступовість переходу здійснюється за допомогою нескінченно малих. Але під час обчислень їх не слід ураховувати. У філософському сенсі нескінченно мала у Г. Лейбніца символізує специфіку відмінності кожної субстанції – монади від її умовних «сусідів» – відмінності, яка якісно та кількісно менша, ніж будь-яка певна величина та інтенсивність (згідно з принципом безперервності), і все-таки, що в кожному конкретному випадку є досить визначеним, оскільки (згідно з принципом загальної дискретності) монада неодмінно відрізняється від інших, навіть дуже на неї схожих. Філософські нескінченно малі – це ні нулі, ні деякі певні величини. Вони у Г. Лейбніца не зводяться до символів мислення, це динамічні центри буття й свідомості, тобто «монади». Пояснення нескінченно малої величини, обґрунтоване Г. В. Лейбніцом, Г. Кантор не прийняв.

Підбиваючи підсумок свого осмислення традиції Нового часу відносно континуального – дискретного німецький математик робить висновок: «Різноманітні вчення низки авторів (Г. Кантор вказує на Б. Спінозу та Г. Лейбніца) під час обговорення питання про кінцевість і нескінченність сходяться на тому, що до поняття числа належить його кінцівка і що істинне нескінченне або абсолютне, таке, що не передбачає ніяких визначень»[50].

Побудова нової логіко-математичної теорії Г. Кантора, незважаючи на його спекулятивне мислення, була б неможливою без осмислення ним сутності фундаментальних філософських категорій континуального – дискретного в традиціях античності, середньовічної культури, Нового часу.

Виникнення теорії множин Г. Кантора – це також і результат його досліджень можливості арифметизації математичного аналізу, визначення його вихідних понять за допомогою арифметики. Водночас німецький математик використовує висновки теорії меж О. Коші. Г. Кантор здійснює спробу уточнення теорії дійсних чисел: «Коли я говорю про числову величину в загальному значенні, то це відбувається, передусім, у тому випадку, коли запропонована нескінченна послідовність раціональних чисел a1, a2, ... an, ..., задана за допомогою деякого кінцевого закону і володіє такою властивістю, згідно з якою різниця an + m – an стає нескінченно малою в разі зростання n, яке б не було ціле позитивне m, або, іншими словами, що для довільно обраного

[49] Лейбниц Г. В. Соч. в 4-х т. Т. 2. – М. : Мысль, 1983. – 685 с. – С. 152.
[50] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 74.

(позитивного раціонального) ε існує таке ціле число n, що an+m – an < ε, якщо n ≥ n1, і m – будь-яке позитивне число»[51].

На думку логіка, результати дослідження нескінченно малих можна звести до зіставлення гранично малих відрізків, усередині яких вони перебувають або точкових множин. Такий підхід передбачає введення в математику нових абстрактних об'єктів, головними з яких у теорії множин є потужність точкової множини й актуальна нескінченність послідовно впорядкованих точкових множин. Німецький математик розробив і такі поняття, як: «невласне нескінченна» – змінна, яка або збільшується, долаючи всі межі, або зменшується до довільно малої величини, але завжди залишається величиною кінцевої; «власне нескінченна» – змінна, яка завжди набуває цілком конкретної форми. Перша форма – невласне нескінченна – визначається як змінна кінцева, а друга – як певне нескінченне.

Г. Кантор розвиває уявлення про абстракції нескінченного, в основі яких лежать припущення про його здійсненності. Найбільш простою серед них є абстракція фактичної здійсненності, вона враховує різницю між побудовою одного об'єкта і сукупності об'єктів. При цьому встановлення кордонів здійсненного (того, що можливо побудувати) має динамічний характер і цілком визначається конкретними умовами вирішуваної проблеми. Спираючись на абстракцію фактичної здійсненності, науковець розглядає нескінченність як актуальну. «У своїх дослідженнях я довів, що після кінцевого існує Transfinitum (яке можна було б назвати Suprafinitum), тобто безмежна ієрархія певних модусів, що за своєю природою не кінцеві, а нескінченні, і які, водночас, охарактеризовані за допомогою відповідних чітко визначених і відмінних один від одного чисел»[52]. Гіпотеза фактичної здійсненності, яка лежить в основі абстракції актуальної нескінченності, передбачає побудову будь-якого об'єкта, у тому числі й нескінченної кількості об'єктів, якщо його можна мислити без протиріч. Нескінченна множина натуральних чисел Г. Кантором розглядається не лише як необмежено продовжене, а вже як побудоване, відразу ж задане з усіма своїми елементами. Абстракція ж потенційної нескінченності, розглянута раніше математиками та філософами, ураховує можливість побудови подальшого об'єкта лише в тому разі, якщо побудовано попередній.

Нові теоретико-множинні побудови – це не лише конструювання відповідних логіко-математичних понять, а й встановлення

[51] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 10.
[52] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 74.

співвідношень між ними, це створення специфічних теоретичних методів дослідження. Теорія нескінченних упорядкованих точкових множин Г. Кантора тісно пов'язана з логікою. Під час розробки структур множин використано дедуктивний метод – ієрархічний рух зверху вниз, за якого загальне (множина всіх дійсних чисел) мислиться як первинне відносно приватного, насамперед гносеологічно, є більш пізнаваним, але водночас і онтологічно, тобто як більш реальне. Ідею впорядкованого нескінченного різноманіття німецький математик розвиває, розглядаючи принципи побудови числових класів або природних відрізків та їх обмежень. Для впорядкування всередині числових класів конструюється поняття потужності множини, під яким мається на увазі кількість елементів, що належать до конкретної множини. Кожній множині визначається своя потужність або кардинальне число. Двом множинам приписується одна і та ж потужність, якщо їх можна зіставити одну з одною поелементно. «Можна зробити висновок, що кардинальні множини завжди мають одну і ту саму потужність, або кардинальне число, і що, навпаки, множини мають одне і те саме кардинальне число, є еквівалентними»[53]. Кардинальне число характеризує загальну якість, властиву всім еквівалентним між собою множинам. Еквівалентність пов'язана з встановленням взаємооднозначної відповідності між множинами. Г. Кантор визначає кардинальне число як загальне поняття, що виникає завдяки абстрагуванню як щодо конкретної природи елементів, так і щодо порядку в множині. З нескінченних множин найменшим кардинальним числом володіє безліч натуральних чисел, позначене німецьким математиком ℵ(0) (алеф-нуль). Дії над алеф відрізняються від операцій зі звичайними числами. Наприклад, при визначенні кардинального числа множини, утвореного шляхом об'єднання кінцевого безлічі, що містить k елементів, і нескінченної кількості натуральних чисел спочатку перелічуються всі елементи кінцевого безлічі, а потім (так як об'єднання множин не залежить від порядку елементів у ньому) нумеруються елементи натурального ряду чисел. Якщо останній елемент кінцевого безлічі отримує номер k, то перший елемент натурального ряду чисел k + 1. Використовуючи такий прийом, елементи нового множини можна співвіднести з рядом натуральних чисел, хоча він є складовою нової множини:

1, 2, 3, ... k, k + 1, k + 2, ...

На відміну від кардинального, ординальне число Г. Кантор визначив як загальну якість, властиву всім множинам, що зберігає

[53] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 299.

порядок своїх елементів. У цьому разі відбувається абстрагування лише щодо природи елементів множини, а не від їх порядку. У сучасній літературі з вивчення математичної логіки та дискретних методів у математиці ординальним числом названий тип цілком упорядкованої множини.

Числові класи – це природно зростаючі послідовності потужностей чітко визначених множин. «Інша позитивна сторона нових чисел (числових класів) полягає, на нашу думку, у понятті кількості елементів цілком упорядкованого нескінченного різноманіття... Поняття кількості набуває предметного вигляду завдяки зв’язку між кількістю та числом, що доводить підкреслену нами реальність актуально нескінченного»[54].

На сторінках своїх праць Г. Кантор зазначає, що до ідеї актуальної нескінченності він прийшов проти власної волі, усупереч сформованим у математиці традиціям. Вивчаючи тригонометричні ряди, він виявив, що поняття граничної точки й ірраціонального числа вимагають використання нових дослідницьких принципів, зокрема класифікації нескінченних множин. «Як у геометрії, так і в теорії функцій утворився інший, настільки ж правомірний рід поняття нескінченності. Так, наприклад, під час дослідження аналітичної функції комплексної змінної величини стало необхідним і загальновживаним уявлення в площині, що становить комплексну змінну, одну-єдину, що лежить у нескінченності. Ідеться про дослідження поведінки функції поблизу точки, що є нескінченно віддаленою. Водночас поведінка функції навколо нескінченно віддаленої точки виявляє точно такі самі явища, як і навколо будь-якої іншої, розташованої на кінцевій відстані точки. Таким чином, можна зробити висновок про те, що нескінченне розташоване в деякій цілком певній точці»[55]. Німецький математик довів, що множини цілих, раціональних і навіть алгебраїчних чисел еквівалентні безлічі натуральних чисел, які називають лічильно нескінченним або просто рахунковим. Елементи різноманітних множин чисел можна нумерувати за допомогою необмежено зростаючої послідовності натуральних чисел. Г. Кантор не обмежився порівнянням нескінченних множин. Він створив особливу трансфінітну арифметику, закони якої передбачають узагальнення законів арифметики кінцевих множин. Водночас німецький математик підкреслював, що сфера певних величин не вичерпується величинами кінцевими.

Теорія Г. Кантора протягом досить тривалого часу слугує зразком

[54] Там само. – С. 67.
[55] Там само. – С. 65.

дослідження в математиці, визначає домінуючий стиль логіко-математичного та філософського осмислення як нескінченно малих, так і нескінченно великих величин, набуває парадигмального характеру.

Теоретико-множинні принципи використав Л. Кронекер для обґрунтування натуральних чисел, до яких вдалося звести раціональні, а потім і дійсні числа. У контексті зазначених напрацювань Н. Лузін здійснив дослідження дескриптивної теорії множин. У подальшій розробці дескриптивної теорії множин брали участь Л. Канторович, Л. Келдиш, А. Колмогоров, М. Лаврентьєв, П. Новіков та інші.

Підбиваючи підсумки, можна констатувати, що значення праць Г. Кантора вийшло далеко за межі нової логіко-математичної дисципліни. Теорія множин посіла чільне місце, передусім, у системі математичного аналізу, слугуючи фундаментом теорії функцій дійсного змінного. Теоретико-множинні методи було застосовано в теорії ймовірностей, математичній логіці, що підтверджує неабияку цінність праць Г. Кантора.

Філософсько-семантичні основоположення парадоксів теорії множин Г. Кантора

У другій половині XIX століття теорія нескінченних впорядкованих множин, сконструйована Г. Кантором, отримала визнання серед математиків. Але вже в 1895 році сам автор виявив певні суперечності в обґрунтованій ним теорії. Так, наприклад, безліч ординальних чисел (згідно з Г. Кантором, ординальне число позначає порядок елементів в аналізованих підмножинах), розташованих у зростаючому порядку, може бути охарактеризоване загальним ординальним числом. Будучи найбільшим серед усіх ординальних чисел, загальне ординальне число повинно перевершувати будь-яке число безлічі власне ординальних чисел. Будучи елементом множини, загальне ординальне число не повинно бути більшим, ніж безліч ординальних чисел. Так, розглянута безліч містить усі ординальні числа, які характеризують універсум якісно, але не кількісно.

Інший парадокс Г. Кантор виявив у 1899 році. Він пов’язаний із визначенням кардинального трансфінітного числа (характеризує потужність або кількість елементів в аналізованій підмножині). Водночас значну тривогу серед математиків викликав парадокс, виявлений у 1902 році Б. Расселом. Він пов’язаний не зі спеціальними питаннями теорії множин, а із власне канторівським трактуванням множини. Йдеться про однорідність (згідно з Г. Кантором, консистентність елементів множин і, з огляду на це, множину всіх множин, які не є елементами самих себе).

Кількість наукових напрацювань, присвячених математичному осмисленню теорії множин і її парадоксів, є досить значною. Тому посилаємося лише на найбільш доступні дослідження, у яких бібліографію може бути істотно доповнено. Зазначеній проблематиці присвятили свої праці А. Бар-Хіллел, І. Буран-Форті, Д. Гільберт, Х. Каррі, А. Пуанкаре, А. Френкель та інші. Парадокси теорії нескінченності розглядали П. Брауер, К. Вейєрштрасс, К. Гедель, К. Кліни, Б. Рассел, А. Уайтхед, Г. Фреге, Е. Цермело, дослідницька група Н. Бурбаки.

Низка математиків, у тому числі Д. Гільберт, П. Коен, Е. Бет, Х. Каррі, стверджували, що виявлені суперечності є вкрай штучними. Ні в математичному аналізі (теорія Г. Кантора спрямована, зокрема, і на арифметизацію аналізу), ні в геометрії такі парадокси не були виявлені. На їхню думку, не слід турбуватися про парадокси, що виникають на «межі» теорії множин. У математиці використовуються лише певні типи множин, і тому не застосовуються лінгвістичні побудови під час утворення понять, що зумовлюють парадокси. Д. Гільберт зауважував, що ніхто не може вигнати математику з раю, який створив Г. Кантор[56].

Протилежні точки зору висловлювали Б. Рассел, А. Уайтхед, К. Кліні, Ч. Буралі-Форті та інші математики. Б. Рассел, щоб уникнути парадоксу безлічі всіх множин запропонував теорію типів, згідно з якою елементи й сама множина належать до різних ієрархічних типів об’єктів.

Метою аналізу філософських засад парадоксів теорії множин Г. Кантора є розкриття актуальної та потенційної нескінченності – лише регулятивних форм математичного мислення. У контексті зазначеного представимо дві різні за своїм змістом сфери знання для математика та логіка. Визначимо характер парадоксів у світлі семантики як пов’язаних із використанням лінгвістичних (слова, символи, пропозиції) і нелінгвістичних (числа, множини як об’єкти аналізу, поняття) об’єктів.

Осмислення парадоксів і їх причин у теорії Г. Кантора не може бути здійснене односторонньо, з позиції або математичної, або філософської. Аналіз може різнитися власними засобами, проте не цілями. Філософське осмислення проблеми не передбачає математичної суворості, але без філософської рефлексії неможливо визначити засад,

[56] Гильберт Д. Основания геометрии / О бесконечном. // Д. Гильберт – М., 1948. – 368 с. – С. 350.

які зрештою зумовлюють твердження, що здаються парадоксальними.

Математичне мислення – одна з форм міркувань, за допомогою якої людина прагне вийти за межі власного досвіду. На думку І. Канта, це – необхідна апріорна форма наочного внутрішнього міркування, що забезпечує уявлення власне предметів. Математика – це і особлива знаково-символічна система описів, що завжди вимагає достатніх лінгвістичних визначень. Теорія множин, на думку Г. Кантора, а згодом Г. Фреге, Б. Рассела, не може розглядатися лише як математична побудова. Вона має власні онтологічні, гносеологічні, методологічні засади, посідає особливе місце в обґрунтуванні математичного аналізу.

У контексті сучасної математики обґрунтування кожної теорії зводиться до з’ясування її логічної несуперечності, що завжди було математичною проблемою. Природним у цьому напрямі є зведення питання про несуперечність складних теорій до несуперечності теорій простіших і менш проблематичніших. У другій половині XIX століття проблема логічної несуперечності виникла в контексті теорії множин і арифметизації аналізу.

Незважаючи на те, що принципи арифметики відображені в ключових поняттях теорії множин, це насправді хоча й взаємодоповнюючі, проте різні теорії. Посереднє місце між ними посідає теорія чисел, яка є основою математичного аналізу. З одного боку, вона спирається на положення алгебри, що мають фінітну і дискретну природу, з іншого – на ідею безперервності, що відображає континуальный характер безлічі дійсних чисел. Починаючи з античності, положення арифметики й теорії чисел доведені до досить змістовної ясності і стабільності принципів.

Сьогодні обговорення проблем математики вкрай рідко відбувається в контексті філософських міркувань. Здебільшого йдеться про дедуктивні процедури виведення. Онтологічне обґрунтування математичних теорій необхідно перетворити з епізодичного на систематично використовуваний засіб, що було властиво математиці античності й Нового часу. Так, наприклад, твердження, які Евклід подає у своїй геометрії, це не просто аксіоми, а опис онтології геометрії. Подальший розвиток геометрії відсунув онтологію вбік, зробивши підґрунтям математичного мислення формальний зв’язок суджень. Осмислення парадоксів теорії множин вимагає звернення до онтології математики.

Спробуємо розглянути парадокси теорії множин з позиції онтології математики. Вона розрахована на подолання лише формально-логічного підходу до теорії множин. Засадничою позицією є переконання в несуперечності вихідних математичних принципів трансфінітної арифметики, що визначають категоріальні структури мислення. І. Кант у «Пролегоменах до кожної майбутньої метафізики, яка може постати як наука» зауважує: «Особливість кожного математичного пізнання полягає в тому, що воно має виявляти своє поняття, передусім, у спогляданні, до того ж апріорному, а отже чистому, а не емпіричному. Без цього математика не може зробити жодного кроку, тому її судження завжди є інтуїтивними. Водночас філософія повинна задовольнятися дискурсивними судженнями із самих лише понять, пояснюючи свої аподиктичні вчення завдяки спогляданню, не маючи змоги на основі них нічого вивести»[57]. Спираючись на твердження І. Канта, який стверджує, що підґрунтям математики завжди є чисте споглядання, виділимо найбільш значущі аспекти існування будь-якої математичної теорії, які, звісно, стосуються і теорії Г. Кантора.

Перший – обов'язковість виведення математичних суджень з основоположної теорії. Другий – необхідність семантичної визначеності, яка дає змогу використовувати принципи однієї формальної теорії на об'єктах іншої формальної теорії. У нашому випадку будемо розглядати здійсненність принципів арифметики й теорії дійсних чисел у трансфінітній арифметиці Г. Кантора. Третій аспект означений співвідношенням загальних принципів побудови математичної теорії та системи аксіом, що становить її зміст. Четвертий аспект – обов'язковість інтерпретації формальної теорії як системи опису, тобто її універсальність. Математичний апарат повинен бути застосовний у межах моделювання різноманітних фізичних об'єктів. Цей аспект є особливо важливим, адже відображає співвідношення принципів формальної теорії та описуваних у сконструйованих нашим мисленням категорій картини світу.

В «Науці та гіпотезі» А. Пуанкаре висловив думку про те, що істинність або хибність можуть бути приписані до математичної теорії лише в зв'язку з певною її інтерпретацією – лише відносно комплексу (М + Ф), де М – математична теорія, Ф – її фізична інтерпретація[58]. Для аналізу філософських підстав парадоксів теорії нескінченних упорядкованих множин Г. Кантора всі виділені нами аспекти є значущими. Теорія, сконструйована німецьким математиком, – абстрактна побудова. Логік розвиває уявлення про абстракції нескінченного, в основі якої лежать припущення про його

[57] Кант И. Собр. соч. в 8 т. – М. : «Чоро», 1994. – Т. 4. – 629 с. – С. 35.

[58] Пуанкаре А. О науке. – М. : Наука, 1983. – 559 с. – С. 410.

здійсненності. Найбільш простий серед них є абстракція фактичної здійсненності, що враховує різницю між побудовою одного об’єкта і сукупності об’єктів. Водночас встановлення меж нездійсненного (того, що можливо побудувати) має рухливий характер і цілком визначається умовами розв’язуваної проблеми. З позиції онтології математики положення про нескінченність ряду натуральних чисел логічно доказати не можна. Якщо тлумачити його як можливість постійно добудовувати нескінченну сукупність об’єктів, то істинність твердження актуальної нескінченності все ж буде проблемною внаслідок того, що фізична нескінченність для нас недоступна. Загальна значущість та аподиктична очевидність цього положення базується не на досвіді чи логіці, а на інтуїтивних ідеалізованих побудовах. Ідея нескінченності ряду натуральних чисел виникає з припущень математичної онтології. Ряд натуральних чисел, будучи конструкцією нашого інтелекту, продиктований орієнтацією свідомості як понятійний корелят необхідних уявлень про ідеальну предметність. Математична безперервність не може бути виправдана досвідом, її не можна ввести на підставі математичних постулатів. В основі математики лежить не лише ідея предметності, а й ідея екстенсивної величини, якій властива однорідність, нескінченна неподільність і безперервність.

Обґрунтовуючи ідею актуальної нескінченності, німецький математик бере до уваги вчення І. Канта, у працях якого продемонстровано зразки конструктивістського й антиномічного мислення. Ідею нескінченного І. Кант аналізує через уявлення про простір: «Простір є нескінченно даною величиною. Кожне поняття, звісно, треба тлумачити як уявлення, наявне в нескінченній безлічі інших різних уявлень (як можливу ознаку). Водночас жодне з понять не можна усвідомлювати як нескінченну сукупність уявлень»[59]. Одне з основних кантівських тверджень про ідеї розуму як регулятивні поняття, які не мають насправді корелята, позначають лише внутрішню логіку руху думки. Від кінцевої кількості причинових зв’язків, представлених у досвіді, ми, згідно з вченням І. Канта, звертаємося до ідеї Природи, від уявлень про окремі конкретні психічні акти до поняття Душі як безумовної цілісності. Необхідність ідеальної цілісності лежить в основі людського мислення. Це положення І. Канта неодноразово розглядалося Г. Кантором. Ідеальна цілісність, як результат завершеного руху, натільки ж звична для мислення, як і ідея нескінченного становлення (потенційної нескінченності), обґрунтована ще Аристотелем.

[59] Кант И. Собр. соч. в 8 т. – М. : «Чоро», 1994. – Т. 3. – 740 с. – С. 66.

Уявлення як про потенційну нескінченність, так і про актуальну, уже сформовану, водночас таку, що постійно ділиться всередині себе на класи нескінченності, зовсім не стосуються ні нашого досвіду, ні конструювання картини світу. Ці ідеї – лише регулятивні форми нашого мислення. Г. Кантор обґрунтовує ідею актуальної нескінченності, класифікуючи кінцеві множини, аналізуючи їх як складові нескінченної безлічі елементів (за його словами, об'єктів інтуїції), розглядаючи кінцеві множини як лінійно впорядковані точкові різноманіття. Ідею прийнятності актуальної нескінченності, на основі її зв'язку з потенційною, у логічному контексті достатньою мірою розкрито німецьким математиком. Г. Кантор був переконаний у тому, що актуальна нескінченність, як і потенційна, слугує основою математичного мислення. Розглядаючи логічний зв'язок актуальної та потенційної нескінченності, німецький математик пише: «У першій формі, невласно нескінченній, вона постає як змінне нескінченне. В іншій формі, у якій я називаю її власне нескінченним, вона усвідомлюється як цілком певне нескінченне. Реальним нескінченним цілим числам, які я хочу визначити в подальшому і до яких я прийшов вже багато років тому, не усвідомлюючи того, що в них ми маємо конкретні числа з реальним значенням, з невласно-нескінченним, – навпаки, їм притаманний той же характер визначеності, який ми спостерігаємо в разі нескінченно впорядкованої точки в теорії аналітичних функцій»[60].

Крім логічної необхідності, існує методологічна, визначальна можливість аналізу кожної побудови. Г. Кантор уважав, що в разі постійної побудови відсутній метод міркувань. Методологія математичного аналізу переконує, що цілісний об'єкт, заданий з усіма його елементами, завжди піддається аналізу його складових, отже, стала (актуальна нескінченність) неможлива без потенційної нескінченності.

Якщо стверджується наявність потенційної нескінченності, допускається можливість побудови подальшого об'єкта лише в тому разі, якщо побудовано попередній. Так, неминуче затверджується і наявність породжуючої функції, що належить до нескінченної кількості елементів, обов'язково еквівалентних один одному щодо приналежності до породжуючої функції. Розглянуті елементи мають певні порядкові значення. Клас як обов'язкова умова має еквівалентність складових його елементів, що розглядаються як єдина і завершена цілісність. У методологічному аспекті уявлення про актуальну нескінченність передбачає не лише ідею завершених класів еквівалентних елементів, а

[60] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 65.

й наявність функцій чинників, що створюють такі класи. Аналізуючи функції, Г. Кантор вибудовує нескінченні множини як класи, задані цими функціями.

Німецький математик, створюючи теорію трансфінітних чисел як некількісну алгебру, використовує логіку для виправдання математичних міркувань. У його працях математична символіка набуває характеру, що більшою мірою притаманний логіці. Вводячи поняття кардинального числа як потужності множини та ординального (як такого, що визначає порядок усередині множини) Г. Кантор оперує формулами, які реалізовують послідовність міркувань. Теорію множин можна визначити як одну з математичних дисциплін, завдяки якій математика в XIX столітті стає наукою про порядок. Так, прагнення Г. Кантора позначити чіткі межі прийнятності, охарактеризувати поняття актуальної нескінченності в подальшому призводить до лінгвістичної невизначеності. Актуальну нескінченність в описах німецького математика можна розглядати не просто як завершену, а й також як «замкнуту» в собі систему об’єктів, що поділяються на різнорідні за своїм якісним складом класи.

Р. Кантор поєднує між собою різнозмістові класи, характеризуючи кожен із них кількісно. При цьому якісні властивості класів (ординальні числа), що містять різні за своїм складом елементи, однакові. Ординальне число дає уявлення лише про структуру (порядок), але не зміст класу. Г. Кантор зазначає: «Серед трансфінітних чисел системи Ω, яким у якості кардинального числа не відповідає жодна система з ℵ із кінцевим ν, знову таки є найменше, яке ми позначимо як ωω0 та з його допомогою отримаємо новий алеф ℵω0 = ωω0, визначений рівністю ℵω0 = Σν = 0, 1, 2 … = ℵν, і він називається кардинальним числом, безпосередньо наступним за усіма ℵν. Ми переконані, що цей процес освіти алефов і відповідних числових класів системи Ω є абсолютно безмежним... Тепер постає питання: чи всі трансфінітні кардинальні числа наявні в цій системі?»[61].

У канторівському визначенні континууму як безперервного творення дискретних сукупностей лінійних точкових многовидів і потужності всіх потужностей множин немає прямого протиріччя виду «А і не А». Але в теорії кардинальних кінцевих чисел відсутнє чітке понятійне визначення кінцевих множин, які можна отримати, розглядаючи не лише впорядковані структури множин, а й визначаючи безлічі змістовно, про що згодом писав Б. Рассел: «Знадобилося чимало

[61] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 367.

століть, щоб зрозуміти, що пара фазанів і пара днів є прикладом числа два. Відкриття того, що один є числом, було важким»[62]. Проблему математичних описів і пояснень у теорії Г. Кантора аналізував Д. Гільберт, який переконливо довів, що Г. Кантор «...звузив коло допустимих тверджень про елементи множин, ... побудував теорію таким чином, що, незважаючи на ці обмеження, вона не втратила своєї цінності»[63]. Канторівська система основоположних аксіом не викликала ніяких серйозних заперечень у середовищі як математиків, так і філософів. Цілком очевидно, що суперечності виникають не із задачі, яка вирішується завдяки введенню системи аксіом. У зазначеній теорії вони полягають у системі опису та пояснення. Пошуки адекватного опису системи онтологічно несуперечливого пояснення континуум-гіпотези здійснювали Д. Гільберт, К. Гедель, а також П. Коен, який у 1966 році на Московському міжнародному конгресі математиків за реалізацію логічно несуперечливої системи опису континуум-гіпотези був нагороджений премією Філдса.

Основоположення канторівської теорії за необхідності мають бінарний характер. У якості аксіом розглянуті принципи розширення і вибору. До перших належать аксіоми, з допомогою яких з еквівалентних кінцевих множин утворюються більш великі. Це відбувається за допомогою логічних операцій об'єднання, перетину, утворення множини-ступеня. Під час аналізу структур множин використано дедуктивний метод – ієрархічний рух зверху донизу, де загальне (множина всіх дійсних чисел) усвідомлюється первинним відносно його частин, передусім, гносеологічно – більш пізнаваним, і водночас, онтологічно більш реальним. «Найістотнішою ознакою кінцевих множин слід уважати те, що вони не еквівалентні стосовно кожної зі своїх основних частин. Актуально нескінченна безліч завжди володіє тією властивістю, що в ньому багатьма способами можна виділити складову частину, яка еквівалентна йому»[64].

Поряд з аксіомами, що дають змогу виконувати логічні операції щодо збільшення потужності еквівалентних множин, німецький математик розглядає метод вибору елементів, який в явному вигляді так і не було сформульовано, але, тим не менш, використовувався Г. Кантором. Обґрунтовуючи вчення про кардинальні числа, Г. Кантор

[62] Рассел Б. Введение в математическую философию. – М. : «Гнозис», 1996. – 240 с. – С. 13.

[63] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики / Логические исчисления и формализация арифметики. – М. : Наука, 1982. – 544 с. – С. 414.

[64] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с. – С. 301.

розкриває сутність методу вибору елементів із множин. Унаслідок громіздкості наведемо лише його фрагмент: «Окремої речі E0, коли ми підведемо її під поняття множини E0 = (e0), відповідає як те, що ми називаємо одиницею і позначаємо через 1: маємо 1 = E0. Приєднаємо тепер до E0 деяку іншу річ e1 і позначимо через E1 суму множин, так що E1 = (E0 e1) = (e0 e1). Додаванням нових членів отримуємо послідовність множин E2 = (E1 e2), E3 = (E2 e3) …, яка при необмеженому продовженні приводить нас до так званих основних кардинальних чисел»[65]. Надалі канторівський метод вибору елементів із множин Е. Цермело назвав аксіомою вибору, яку сформулював та обґрунтував Д. Гільберт. Суперечки навколо аксіоми вибору тривали три чверті століття. Вони були зумовлені відношенням загальних принципів побудови теорії множин до змісту правила вибору (тобто аксіоми вибору).

Метод вибору, запропонований Г. Кантором, підтверджує можливість побудови нової безлічі в межах виділення по одному елементу з довільної сукупності множин, прийнятих у теорії. Онтологічний аспект вибору методу полягає в його очевидності, несуперечності основним принципам теорії множин. У ньому закладено поняття одиничного об’єкта й логічної операції диз’юнкції як категоріально осмислених сутностей.

Одиничний об’єкт і логічна операція задають ряд арифметичних об’єктів, де кожен наступний збільшує сукупність на одне значення. Можливість вибору елемента з будь-якої безлічі дає уявлення про дискретності множин у континуумі, що власне не може бути джерелом протиріч. Але метод вибору орієнтований лише на «правильні» в канторовському розумінні безлічі, що обмежує його беззастережну застосовність теорії.

Гносеологічний аспект правила вибору полягає в тому, що нове, отримане шляхом вибору елементів безліч, сама є об’єктом аналізу, у конструюванні функції, за допомогою якої здійснюється вибір елементів. У найпростіших випадках, наприклад, якщо родина складається з множин виду {a, b}, де a, b – дійсні числа, у якості опції вибору служить мінімальне значення з двох чисел: f = ({a, b}) = min (a, b). Але в загальному випадку Г. Кантором не вказано жодного правила, з допомогою якого можна було б вибрати елементи представників сімейства переданих множин. Пізніше Д. Гільбертом сформульовано загальне твердження, як правило вибору елементів. «Якщо для будь-

[65] Там само. – С. 180.

якого об’єкта X виду (Gattung) G1 існує щонайменше один об’єкт Y виду G2, пов’язаний з X відношенням $\beta(x, y)$ то існує функція ϕ, яка кожному об’єкту X, виду G1 обов’язково зіставляє такий об’єкт $\phi(x)$ виду G2, який пов’язаний з X відношенням $\beta(x, \phi(x))$, при цьому $a - 1/x < y \leq a$ функція ϕ, існування якої витягується з аксіоми вибору, являє собою зіставлення дійсного числа сх з його номером X»[66].

Підтримуємо позицію Д. Гільберта, який, аналізуючи канторівське правило вибору, стверджує, що в теорії множин уведено фундаментальні уявлення, що не належать до «...галузі наочності арифметичного мислення. Сувора побудова аналізу призвела нас до розуміння того, що цих небагатьох фундаментальних припущень достатньо для побудови теорії величин як теорії числових множин»[67]. Д. Гільберт відносить правило вибору до основоположень теорії множин. Воно конкретизує поняття безлічі правила визначення через рід і вид, яке необхідно для осмислення будь-якого предмета. Аксіома вибору може бути зрозуміла як результат застосування універсального логічного принципу відносно предметної області, що гарантує умови його здійсненності. Методологічний аспект аксіоми вибору полягає в тому, що вона, будучи необхідною для доказу низки теорем, визначає, що кожну множину можна зробити цілком упорядкованою. Канторівський метод вибору, під час його детального аналізу, на відміну від аксіом розширення, вимагає додатково низки визначень, які стосуються, зокрема, впорядкування в підмножинах, з яких обираються елементи. Способи впорядкування розглядаються німецьким математиком лише формально. Змістовне онтологічне обґрунтування впорядкування всередині класів згодом запропонував Б. Рассел. «У пошуках визначення порядку перша річ, яку слід зрозуміти, – це те, що безліч термінів не має єдиного порядку, наявність якого виключало б наявність інших. Безліч термінів має всі порядки, на які лише здатна. Іноді один порядок більш знайомий і звичний для нашого мислення, і тому ми схильні вважати його єдиним порядком для безлічі термінів. ... Ми могли б, наприклад, спочатку розглядати всі непарні числа, а потім всі парні числа, або спочатку 1, а потім всі парні числа, всі непарні числа, а потім всі непарні числа, що діляться на 3, а потім всі, які діляться на 5, але не на 2 або на 3, а потім всі, котрі діляться на 7, але не на 2 або на 5 і так далі в усьому ряду простих чисел»[68]. Порядок, на

[66] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики / Логические исчисления и формализация арифметики. – М. : Наука, 1982. – 544 с. – С. 68.

[67] Там само. – С. 69.

[68] Рассел Б. Введение в математическую философию. – М. : «Гнозис», 1996. – 240 с.

думку Б. Рассела, полягає не в класі термінів, а у відносинах між елементами класу. Ураховуючи встановлений нами порядок, одні терміни всередині класу з'являються раніше, інші пізніше. Поняття порядку сутнісно важливо в математиці. Не лише цілі, а й раціональні, усі дійсні числа розташовані в порядку величин. Порядок розташування точок на лінії в геометрії є важливим. Геометричне поняття просторових вимірів є розвитком поняття порядку. Концепція межі, будучи порядковою, слугує підґрунтям математичного аналізу. Лише деякі нечисленні розділи математики не залежать від порядку. Канторівське лінгвістичне визначення класу з точки зору формальної логіки є бінарним, адже містить як судження щодо властивості, так і стосовно відносин. Перше володіє структурою суб'єкт – зв'язка – предикат.

У теорії множин для кожного класу визначена своя потужність, або кардинальне число ℵ (алеф). Щодо другого виду визначення – класу притаманна «сумісність буття його елементів»[69], у кожному класі задано відношення між елементами. З огляду на власне лінгвістичне визначення класу, німецький математик висловлює припущення про те, що весь числовий ряд Ω повинен проектуватися на всю множинність ν (кардинальних чисел), загальне кардинальне число якої не є ℵ. «Дійсно, можна констатувати, що в межах зробленого припущення вся система Ω проектується у всю множинність ν, тобто повинна існувати підмножинність ν/ множинність ν, яка еквівалентна системі Ω»[70]. Водночас підмножинність ν/ визначена як система неконсистентних множин, що перебувають у системі Ω, спільно з консистентними ν множинами. У цьому контексті потребує роз'яснення канторівське трактування множини. З онтологічної позиції, це єдина, цілісна побудова. Г. Кантор – платоник, який трактує безліч як єдине, ряд об'єктів, що володіють однаковими властивостями. Його згадка в листуванні з Р. Дедекіндом про неконсистентні множини, неконсистентності в системі Ω дійсних чисел свідчить про подвійність трактування природи його чисел. Одна з основних тез Г. Кантора полягає в тому, що носієм числа є не річ, а поняття. Процесу рахунку повинно передувати уявлення про рахункову множину та її елементи, що відповідають поняттю єдиного об'єкта. «Безліч кольорів веселки (червоний, оранжевий, жовтий, зелений, блакитний, синій, фіолетовий) і

– С. 36-37.

[69] Кантор Г. Вказ. праця. – С. 297.

[70] Там само. – С. 367.

безліч музичних тонів (C, D, E, F, G, A, H) є еквівалентними множинами. Обидві вони підпадають під загальне поняття сім. Безліч моїх пальців рук і безліч точок в так званому арифметичному трикутнику еквівалентні, їм відповідає число десять. Актуально безліч (ν) усіх позитивних кінцевих чисел ν еквівалентно безлічі ($\mu + \nu i$) всіх комплексних чисел виду $\mu + \nu i$, де $\mu + \nu$ отримують незалежні один від одного цілочисельні позитивні значення»[71]. Для Г. Кантора числа не є самостійними сутностями, відверненими від зовнішніх речей. Останні ж трактуються ним не лише як дискретні одиниці, вони становлять обмежені групи, які розглядаються як єдине ціле, як безлічі, кожному з яких приписується число як предикат.

Приналежність числа до поняття не є суттєвою для арифметики. Арифметичні одиниці поводяться незалежно від їх інтерпретації – від поняття, з яким вони в даній побудові пов'язані. Закони арифметики задані не сферою їх застосування, а властивістю абстрактної предметності.

У своєму розумінні числа Г. Кантор обстоює позицію Г. Лейбніца, який писав: «немає нічого такого, що не могло б бути виражене через число. Отже, число є ніби метафізичною фігурою, арифметика – своєрідною статистикою універсуму, за допомогою якої досліджуються потенції речей»[72]. Г. Кантор аналізує властивості груп речей, абстрагуючись від самих речей. Аксіоми теорії множин, будучи несуперечливими з принципами теорії, все ж інтерпретуються за допомогою математичних, а не фізичних об'єктів. Вони не є гіпотезами про властивості реального світу, що виявляються або істинними, або хибними. Теорія множин є узагальненням принципів таких абстрактних теорій, як арифметика й теорія чисел. У теорії множин стикаємося з абстракціями від абстракцій. З огляду на крайні абстракції, її поняття й принципи можуть відігравати досить незначну роль для описів у фізичних теоріях. Г. Кантор, не вводячи поняття «предикат», оперує певними предикатами множин. Німецький математик використовує підходи класичної логіки, зокрема силлогистичні побудови в знаково-символічному позначенні за межами значущості класичної логіки. Канторівська арифметична інтерпретація ґрунтується на відповідності між змінними силогістики і впорядкованими числовими класами. Мова арифметики й теорії чисел Г. Кантор перекладає мовою математичних символів, якими є предикати множин, або кардинальні числа. Водночас закони класичної логіки – це лише закони мови математики. Парадокси

[71] Там само. – С. 298-299.
[72] Лейбниц Г. В. Собр. соч. в 4-х т. – М. : Мысль, 1984. – Т. 3. – 733 с. – С. 412.

в теорії множин виникли там, де закони мови математики поширилися на мову математичних слів, який не пов’язаний із математикою. Г. Кантор розглядає математику не як попередню логіку. У своєму розвитку логіка залежить від об’єктів мислення й змінюється зі зміною змісту мислення. Традиційна логіка математичного доказу сформувалася через оперування з кінцевими сукупностями об’єктів. За звичкою її законам був приписаний апріорний характер, відповідно, були загублені уявлення про умови її застосування, пов’язані з її походженням. Збої, які виявила класична логіка в застосуванні щодо теорії нескінченних множин, цілком природні. У зв’язку з вищевикладеним необхідно висловити свою позицію щодо логіки й математики як двох різних за своєю структурою та змістом видів знання. Логіка відрізняється від математики як знання змістовне від формального знання. Математичні теорії, за своєю суттю, завжди є формальним знанням. Особливо це стосується арифметики, до якої безпосередньо звертається Г. Кантор, ставлячи перед собою як одну з цілей, при створенні трансфінітного впорядкованих множин – арифметизацію математичного аналізу. Формальна складова логіки, загалом осмислена й описана ще Аристотелем, розглядалася в християнській середньовічній культурі Алкуіном, П. Абеляром та іншими мислителями як суто зовнішня її складова. Від початку свого створення логіка існує як система лінгвістичних побудов, аподиктичних доказів і визначень. Я. Лукасевич у праці «Аристотелівська силогістика з погляду сучасної формальної логіки»[73]. з великою проникливістю розкрив особливості підходу Аристотеля до вирішення проблем силогістики та її кодифікації, показав неспроможність поглядів філософів і математиків на логіку Аристотеля, як на єдину підставу математичної логіки.

Побудови логіки, на відміну від математичних формалізацій, свідчать не про особливі об’єкти, якими є числові послідовності, ряди, функції, а про лінгвістичні форми, поняття, їх обсяги, що безпосередньо запозичено Г. Кантором із логіки для визначення кількості елементів у множині.

Побудови логіки обґрунтовують зв’язки між поняттями. На відміну від математики, логіка є безгіпотезним знанням, зумовленим лише мовними побудовами та його осмисленням. Логіка за способом своєї появи жодним чином не залежить від математики, або будь-якої іншої науки. Більш того, вона протистоїть математиці як знання

[73] Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. – М. : Изд. Иностранной литературы, 1959. – 310 с.

універсальне – спеціальному; як знання аналітичне – синтетичному; як знання змістовне – формальному. Логіка й математика – це галузі знання, що не залежать один від одного.

І. Кант поділяє логіку на аналітику та діалектику. Аналітика відкриває за допомогою розчленування всі дії розуму, діалектика містить правила, завдяки яким ми могли б дізнатися «що щось не узгоджується з формальними критеріями істини, хоча і здається прямо погодженим із ними»[74]. Німецький філософ відкидає поділ логіки на природну та популярну, теоретичну й практичну. «Загальна логіка, будучи лише каноном, відволікається від всяких об'єктів, не може мати практичної частини.Остання була б contradictio in adjecto, оскільки практична логіка представляє знання відомого роду предметів, до яких вона додається»[75]. Практична, або технічна логіка, за думки І. Канта, лише техніка вченості, органон шкільного методу. Практична логіка, в його розумінні, ставиться до мистецтва впорядкування мовних побудов, є вченням про метод. І. Кант пише про прикладну логіку як про метод науки, як про її підґрунтя. «У такому разі, починають будувати, ще не маючи матеріалу, і дають форму, коли ще немає змісту. Техніка повинна викладатися для кожної науки»[76].

Спираючись на канторівські побудови, з'ясуємо місце й обсяг логіки в математиці. У математиці обов'язковою передумовою є дедуктивні та індуктивні процедури, що належать до нелінгвістичних об'єктів. Але математичні міркування та висновки ґрунтуються не лише на правилах логіки, а й на власне математичних очевидностях. Переходи від однієї формули до іншої ґрунтуються на визначеннях математичних об'єктів і не завжди вимагають застосування логічних схем. Так переходячи від виразу (a + b * i) * (a – b * i) до виразу a2 + b2, ми спираємося на алгебраїчні правила виконання операцій із дійсними числами та уявною одиницею. У цьому переході не йдеться про логічні правила роботи з лінгвістичними структурами, але наявна процедура дедуктивного виводу. Усі докази в алгебрі, математичному аналізі, теорії функцій пов'язані з конструюванням об'єктів, які є поза логічними. Усі докази в геометрії ґрунтуються на наочних геометричних перетвореннях. Необхідно все ж визнати, що в математичному мисленні присутня компонента, яка безпосередньо спирається на логічні побудови та лінгвістичні структури. Це обґрунтування дедуктивних висновків. Існує кілька незалежних типів

[74] Кант И. Собр. соч. в 8 т. – М. : «Чоро», 1994. – Т. 8. – 717 с. – С. 273.
[75] Там само..
[76] Там само. – С. 274.

аподиктичної наочності, що визначають математичне міркування. Логіка в математичному міркуванні, по-перше, – встановлює правила побудови визначень, по-друге, – виробляє мову адекватного уявлення математичних міркувань.

Обсяг підрозділу не дає змогу розкрити всі відмінності логіки та математики, розглянути всіх функцій першою в математичних побудовах. Ми перелічили лише основні, необхідні для обґрунтування нашої тези про те, що парадокси теорії множин Г. Кантора пов'язані із застосуванням підходів класичної логіки, зокрема силогістичних побудов у знаково-символічному позначенні, за межами значущості власне класичної логіки.

Теорія Г. Кантора – одна з перших фундаментальних логіко-математичних теорій, що виникли в той період, коли математична логіка та її семантика перебували на стадії становлення. Високий ступінь абстрактності, «універсальність» поняття множини, не могли не призвести до труднощів відомих у філософії під час роботи з універсалами. Природно, лише сильна теорія могла бути піддана настільки детальному аналізу та критиці, що й сталося з теорією множин Г. Кантора, яку жорстко критикували як філософи, так і математики. У другій половині XIX, початку XX ст. і математики і логіки цілком перебували під впливом ідей формальної строгості доказів. Основна проблема, з якою стикаємось у теорії Г. Кантора, її джерело суперечностей – надійність змістовних міркувань, про що писав пізніше Б. Рассел, намагаючись сформулювати однозначне визначення класу. «Передусім, слід усвідомити, що класи не можна розглядати як остаточну складову світу... не існує символів ні для класу загалом, ні для кожного конкретного з них, які не були б включені в цей апарат невизначених символів. Водночас усі індивідуальні речі у світі повинні мати імена, які будуть фігурувати серед невизначених символів... Ми не можемо розглядати класи суто екстенціонально, як просто сукупності речей або конгломерату. Якщо ми спробуємо зробити це, то ми з'ясуємо, що неможливо зрозуміти, як можуть існувати такі речі, як нуль – клас, який взагалі не має членів і не може вважатися «сукупністю»; ми також виявимо, що дуже важко зрозуміти, яким є клас, що має лише один член»[77]. Наведена цитата підтверджує, що стосовно основних понять теорії множин ми потребуємо не окремо її аксіоматизації, яка дала змогу лише частково уникнути суперечностей, або ж окремо у філософському дискурсі, а системний аналіз усієї теорії

[77] Рассел Б. Введение в математическую философию. – М. : «Гнозис», 1996. – 240 с. – С. 166.

та основних її складових.

Отже, з формально-логічної позиції досить одного прикладу для виявлення суперечностей у логіко-математичній теорії. Аналіз онтологічного та гносеологічного аспектів дає змогу зробити висновок про те, що теорія множин під час свого функціонування містить суперечності, які пояснюються розходженням трактувань її ключових понять, використанням різних систем пояснення та опису. Системний підхід (з позицій як філософської, так і математичної), будучи на перший погляд гранично абстрактним, насправді усуває абстрактність формально-логічного розгляду з огляду на те, що розкриває внутрішню динаміку теорії Г. Кантора як генетично несуперечливої. Коли стверджується, що змістовно доказ на певному етапі вдосконалення теорії досягає повної надійності, що структура логічних зв'язків у неї прагне до однозначної визначеності або що стабільна аксіоматика неминуче є мінімальною, то висловлюється щось таке, що не може бути віднесено або до логіки, або до математики. Факт надійності доказів (навіть формалізованого) логічно визначити неможливо. Ми не можемо визначити, що стабільна аксіоматика мінімальна, але ми знаємо, що це так, оскільки не допускаємо, що надмірність посилань в елементарних допущених не була б помічена і усунута кимось із математиків. У теорії Г. Кантора необхідно передбачати розв'язність протиріч за умов відсутності достатніх логічних аргументів.

1.2.7. Концепція Г. Фреге в контексті логістичної програми обґрунтування математики

Аналіз концепції Г. Фреге під час обґрунтування логістичної програми математики вимагає висвітлення низки проблем, що постали перед нею в другій половині XIX століття. Поява нових математичних теорій, некількісної алгебри, незалежних один від одного, але в рівній мірі обґрунтованих неевклідових геометрій похитнуло впевненість математиків у очевидності та надійності геометричної інтуїції, на якій ґрунтується евклідова геометрія. Зазначене вище, вимагає нового обґрунтування специфіки математичних міркувань. У результаті розвитку обчислення нескінченно малих величин математики наштовхнулися на несподівані приклади всюди неперервних функцій без похідних. З'явилася потреба відділення поняття дійсного числа від неявного поняття «величини», яке засноване на геометричній інтуїції.

Математична символіка стала втрачати зв'язок з просторовими і кількісними відносинами, набуваючи характеру, більш властивий логіці. Математики другої половини XIX століття починають розглядати онтологічний статус теорій на основі несуперечності наслідків, отриманих з вихідних постулатів. У цьому контексті, логіка як основа аналізу несуперечності міркування придбала першорядне значення. Виникнення в другій половині XIX століття логіцизма, як особливої програми обґрунтування математики, пов'язане, по-перше, з виявленням і аналізом загальних ідей і принципів математики, по-друге, з удосконаленням методів дедуктивних процедур як найважливішого інструменту математичних висновків.

Основоположник сучасної математизованої логіки Г. Фреге у праці «Обчислення понять» роз'яснив свою логістичну систему, яку порівняв з численнями інших представників свого напряму Дж. Буля, Д. Пеано, Е. Шредера та інших. Розкриємо читачеві обумовленість і основні положення логістичного напряму в математиці. Виявимо значимість і продемонструємо філософські основи системи Г. Фреге. Представимо його дослідження, які мають самостійну спрямованість у системі логіцизма. Очевидності, з якими маємо справу в пізнавальній діяльності, у тому числі в математиці, яка є одним з інструментів пізнавальної діяльності, діляться на два класи – асертотичні і аподиктичні. До асертотичних відносяться очевидності досвіду, які мають відносний характер і можуть бути виправлені новим досвідом. Особливістю аподиктичних очевидностей є те, що вони не піддаються ніякому коригуванню і мають позаемпіричний і позаісторичний характер. Одним з видів аподиктичних очевидностей у математиці є геометрична необхідність, яка в XVIII столітті, у зв'язку з бурхливим зростанням математичного аналізу, теорії функцій та інших розділів математики, об'єкти яких володіють високим ступенем абстрактності, поставлена під сумнів. Так, наприклад, Ж. Лагранж у праці «Аналітична механіка», де закладені основи сучасної математичної фізики, закликав позбутися креслень у математичних міркуваннях. Вони, як механічні аналоги, знижують строгість математичних міркувань. Критика геометричної очевидності продовжувалася і в XIX столітті, у зв'язку з арифметизацією аналізу. Б. Больцано вважав, що всі твердження аналізу, якими б яскравими вони не були, повинні отримати аналітичне уявлення, що спирається на визначення функцій і їх властивостей. Він обґрунтував, що твердження аналізу володіють граничною універсальністю, не можуть доводитися з міркувань приватної дисципліни, якою є геометрія[78]. Більш адекватний погляд на геометричну очевидність представлений Г. Фреге, який використав, за його твердженням, у своїх семіотичних побудовах конструкції І. Ламберта[79], який передбачив закон ідемпотичності, використовував геометричні лінії, символічно позначав судження, що входять у силогізм. «Мій понятійний запис, – пише Г. Фреге, – припускає більш широкий задум, ніж Булева логіка, оскільки будучи з'єднаним зі знаками арифметики і геометрії, він претендує на подання відповідного судження»[80].

Основну ідею Г. Фреге відносно геометричної очевидності можна сформулювати в наступних тезах:

1. геометрична очевидність, так само, як і арифметична, не містить у собі ніякого почуттєвого компонента і, унаслідок цього, є лише інтелектуальною властістю математичної надійності;
2. геометрична очевидність є більш широкою, ніж арифметична, оскільки вона – джерело ідей математичної нескінченності. Унаслідок цього її слід розглядати в якості бази змістової уніфікації в цілому.

Для Г. Фреге проблема обґрунтування міркувань і висновків математики полягала у виявленні їх змістовних підстав, так і в забезпеченні їх суворості. Саме така єдність, на думку німецького математика, необхідно для очевидності та надійності математичних положень. «З самого початку я мав на увазі вираження певного змісту. Кінцевою метою моїх прагнень була якась lingua characterica, призначена насамперед для математики, а не обмежена чистою логікою обчислення – calculus. Але зміст має бути передано більш точно, ніж це можливо словесною мовою. Бо останній занадто багато залишає здогаду, вгадуванню, яким би легким воно не було»[81].

Мета німецького математика – зведення арифметики до логіки, що, за його думкою, забезпечить несуперечливості математичних побудов. Усі інші інтерпретації в математиці, у тому числі і геометрична, розглядалися Г. Фреге як заслуговують уваги лише в тій мірі, у якій вони значущі для вирішення його основної задачі. Створюючи математизовану логіку, Г. Фреге спирався, у першу чергу, на логіко-математичну спадщину Г. Лейбніца, на його ідею створення штучної мови науки (caracteristica universalis), заснованої на обчисленні

[78] Кольман Э. Бернардо Больцано / Э. Кольман. – М. : Изд. иностранной литературы, 1975. – 1972. – 386 с. – С. 171.

[79] Фреге Г. Запись в понятиях / Г. Фреге // Логика и логическая семантика. – М. : Аспект Пресс, 2000. – 510 с. – С. 186.

[80] Там само. – С. 192.

[81] Там само. – С. 161.

умовисновків (calcus ratiocinator), мусять скласти «універсальну математику». «Навряд чи хто-небудь може зрівнятися з Лейбніцем з великої кількості нових ідей, щедро розсипаних у його творах... Саме в здійсненності обчислень деякого роду бачив Лейбніц головну перевагу тієї форми писемності, у якій не слова складаються зі звуків, а поняття на основі своїх частин»[82].

На відміну від Дж. Буля, А. Моргана, розробляли основи формалізованої силогістики і логічної теорії відносин, які застосували до логіки методи математики, Г. Фреге поставив протилежну мету – побудову арифметики і математичного аналізу на базі логіки. «Передусім, необхідно, щоб не вступити на абсолютно хибний шлях – постійно мати на увазі ту мету, яку переслідував Буль у своїй символічній логіці, і ту мету, якої я керувався, створюючи своє обчислення понять»[83]. Розвиваючи ідеї нової галузі математичного знання, Г. Фреге не лише дотримувався лейбніцевської настанови, але разом з тим відштовхувався від ідей І. Канта про природу математики та її суджень як синтетичних і апріорних. Його дослідження, спрямовані на логічне пояснення і обґрунтування несуперечності, лежать в основі понять математики. Мова, звичайно застосована математиками при побудові суджень і висновків, володіє недоліками, які не можуть бути переборні математичною символікою, приховуючи повний зміст умовиводів. Ці недоліки, думки Г. Фреге, неможливо усунути засобами традиційної логіки, її мову не пристосований для вираження фундаментальних математичних понять. Доповнюючи логістичну програму, Г. Фреге створив особливу знаково-символічну систему, яка планується як засіб аналізу математичних міркувань. Обґрунтовуючи систему математичних суджень і висновків, Г. Фреге розглядав логічні закони як фундаментальні принципи мислення, які ми можемо усвідомити, але не можемо коригувати. Історичний розвиток знання не може впливати на структуру аподиктичних очевидностей. Логічна семантика, за думкою німецького математика, ґрунтується на уточненні сенсу зв’язку між знаком і значенням, яке він у собі несе. Логічна семантика сприяє обгрунтуванню математичних висновків у тих випадках, у яких вона пов’язана зі сферою аподиктичних очевидностей.

В історії логіки спостерігається постійне коливання у визначенні її обсягу. І. Кант переконаний в тому, що всякий дедуктивний метод – це силогістичний метод. «Утім, з часів Аристотеля, – пише німецький мислитель, – логіка не багато збагатилася за змістом, так це і неможливо

[82] Там само. –С. 158.
[83] Там само. –С. 159.

в силу її природи. Однак вона може багато чого придбати щодо точності, визначеності і виразності – існує лише декілька наук, які досягли такого стійкого стану та не можуть більше змінюватися. До таких належить логіка, а також метафізика. Аристотель не упустив жодного моменту розуму, і в цьому контексті ми лише точніші, методичні і акуратніші»[84]. На думку І. Канта, логіка – апріорна наука про закони мислення, при правильному застосуванні розуму. Логіка – це пропедевтика наук, яка не може бути наукою спекулятивного розуму. Порівнюючи філософію і математику, німецький мислитель пише про те, що ці види знання відрізняються один від одного лише об'єктом. Філософія – це раціональне знання з самих лише понять, математика – це раціональне знання за допомогою конструювання понять.

При аналізі побудов, вироблених у рамках логістичного напряму в математиці, автор поділяє позицію І. Канта, будучи переконаним у тому, що система логічних побудов, що характеризують мислення, не змінюється зі зміною змісту та обсягу виробленого в культурі знання. Ми можемо з повною впевненістю стверджувати, що, незважаючи на різноманіття і складність сучасних математичних теорій, логічні конструкції в міркуваннях сучасних математиків нічим не відрізняються від логічних побудов таких математиків, як Гіпократ і Евклід.

Як в античності, так і в наш час математичне мислення перебуває в колі аподиктичних очевидних норм, таких, як закон несуперечності, закон виключного третього, закон контрапозиції, закон транзитивності прямування, приведення до абсурду та ін. Історичний розвиток логіки як науки вдосконалюється засобами теоретичного аналізу доказів. Математична логіка, народжена працями Дж. Буля, Д. Пеано, удосконалена в працях Дж. Венна, Г. Гроссмана, Р. Гроссмана, А. Моргана, Е. Шредера, є формалізованим розширенням схем традиційної логіки, яка розглядає лінгвістичні побудови.

Логіка жодною мірою не залежить від математики, працює з об'єктами такого порядку як числові класи, функції та інші об'єкти. У силу перевороту, який стався в логіці у другій половині дев'ятнадцятого – початку двадцятого століть (виникнення математичної логіки), вона стала наукою про формалізовані обчислення, сукупністю теоретичних положень про правила їх конструювання, про їх властивості та взаємини.

Формалізовані обчислення, які повинні були б служити лише інструментом вирішення певних проблем логіки, придбали самовдоволене значення та стали спочатку основним її змістом, а потім

[84] Кант И. Логика / И. Кант. Соч. в 8-ми т. Т .8. – М. : Чоро, 1994. – 718 с. – С. 276.

перетворилися в особливий об'єкт математичної логіки. При створенні формальних систем математичної логіки першорядне значення набули міркування зручності дослідження властивостей формалізованих обчислень, математичної простоти та витонченості. Але міркування, пов'язані з подальшою інтерпретацією формальних систем, як правило, не бралися до уваги. Простим прикладом у цьому контексті є багатозначні логіки. За аналогією з двозначною логікою ми можемо будувати формальні числення з будь-якою кількістю значень істинності, але ясно, що тут ми маємо справу не з розширенням принципів традиційної логіки, а з їх формальним узагальненням, що не мають статусу логіки як нормативної основи умовиводів.

Розвиток математичної логіки вдосконалював традиційну логіку, але не збагатило систему її аподиктичних очевидних схем, що визначають кроки доказів, оскільки будь-яке обчислення, поряд з аподиктичними очевидними принципами, завжди містить безліч формул, які не є інтуїтивно ясними і не можуть виступати в якості основи змістовного міркування. Г. Фреге для використання силогістики при дослідженні математичних доказів, відомості арифметики до логіки обмежив застосування силогістики у своїй теорії. Це необхідно для контролю ходу міркувань у процесі виведення теорем з аксіом і виключення будь-якого посилання на очевидність та інтуїцію.

Німецьким математиком зроблена спроба представити силогістику в аксиоматизованій формі. У «Логічних численнях» – третій частині своєї праці, Г. Фреге пише: «Безглуздо говорити про ситуації, у яких деяка думка істинна, і про інші ситуації, у яких та ж думка помилкова. Одна і та ж думка не може бути істинною та помилковою, – у випадках, коли виражаються таким чином, завжди виявляється, що мова йде про різні думки, які вважаються однаковими тому, що їх словесний текст збігається. ...Якщо є дві думки, то можливо лише чотири випадки:

1. перша думка істинна, і така ж друга;
2. перша думка істинна, а друга помилкова;
3. перша думка помилкова, а друга істинна;
4. обидві думки помилкові.

Речення, яке виражає першу думку, є наслідок; а речення, яке виражає другу думку, є умова»[85].

Аксіоматизація силогістики є в онтологічному аспекті обмеженням форми лінгвістичних побудов, яка виникає з вимоги істинності суджень. Судження перестає бути істинним уже внаслідок

[85] Фреге Г. Логические исследования / Г Фреге // Логика и логическая семантика. – М. : Аспект Пресс, 2000. – 510 с. – С. 298.

своєї форми. Гносеологічний аспект семантичної системи Г. Фреге полягає в тому, що виходячи з припущення істинності деяких посилань, стає можливим визначити всю систему істинних суджень, що випливають з цього припущення. Необхідні зв’язки між судженнями визначаються на основі припущення про їх істинність. Стверджуючи, що неприпустимі судження виду «А і не А», стверджується тим самим, що судження, які володіють такою формою, ні за яких умов не можуть претендувати на істинність.

Логічний принцип непротиріччя стверджує лише те, що судження, яке складається з твердження і заперечення, несумісне з поняттям про істинність. Найважливішим принципом, що лежить в основі побудов Г. Фреге, є принцип імплікації, що полягає в тому, що з істинного випливає лише справжнє. Методологічний аспект побудов Г. Фреге є загальним приписом до всієї системи правил висновку. Він полягає в тому, що жодне з правил ні окремо, ні в сукупності з іншими не може допустити переходу від істинних тверджень до помилкових. Допущення того, що істинні посилання містять у собі щось помилкове, несумісне з ідеєю їх некоректості.

Німецький математик, уввіши ті або інші знаки (синтаксис), відразу ж задає їх значення (зміст, значення – семантика). Тому для Г. Фреге не існує проблеми доказу несуперечності свого обчислення. Його вчення ставить питання, які науки XX століття віднести до металогіки і метаматематики. Так, для пропозиційної логіки формулюються схеми аксіом, які виражають принцип «істина випливає з усього, що завгодно», і ослаблений modus ponens (закон самодистрибутивності імплікації). Система принципів пропозиційної логіки Г. Фреге дедуктивно повна і несуперечлива. Розглядаючи окремо фрегівські синтаксис і семантику, виявимо, що всі доказові в системі судження – загальнозначущі (при будь-яких значеннях пропозиціональних змінних приймають значення «істина») з точки зору його семантики, а всі змістово істинні судження – доказові.

Фрегівське уявлення про логіку визначає характер побудови всього обчислення як розширеного функціонального числення. Його формальна система містить аксіоми як для пропозиціонального (розглядає значення «істинно» чи «хибно») обчислення, так і для обчислення предикатів. Німецьким математиком здійснено оригінальний підхід до побудови математизованої логіки. Г. Фреге відмовився від традиційного поділу висловлювань на такі елементи, як суб’єкт і предикат. Він розглядав предикат, як функцію, яка містить один або декілька аргументів. Завдяки такій побудові ним досягнуте єдине трактування як атрибутивних висловлювань (у яких виражається належність властивостей предмета), так і висловлювань про стосунки.

Зазначимо, що згідно Г. Фреге, предмет, на відміну від поняття, яке визначено як таке, що має об'єм, не предикативен, він ніколи не може бути висловлений про що-небудь. У мові предметів відповідають власні імена, а поняттями – понятійні слова. У фрегівському підході атрибутивне висловлення можна представити у вигляді одномісної функції, а висловлювання про стосунки як багатомісну функцію. Щодо кванторів передбачалося, що вони можуть пов'язувати не лише предметні, а й предикативні змінні.

Г. Фреге допускав необмежену ієрархію функцій, принципів, які дозволили ввести таку абстракцію, як «пробіги значень функцій», що визначила універсальність предметної області його логічних побудов. Запровадження всеохоплюючої предметної області пов'язано з жорсткою вимогою того, щоб кожне поняття мало чіткі межі. У науці не повинно бути безглуздих, які не виражені поняттями. Жодне висловлення не повинно виявлятися, не маючи значень. Неможливі обчислення, у яких оперували б порожніми знаками, вважаючи, що маємо справу з предметами.

За Г. Фреге, поняття є приватним випадком функцій. Предикативну природу понять складає їх «ненасиченість». Наприклад, у реченні «Ранкова зірка є планета» граматичний об'єкт означає предмет, а граматичний предикат – поняття (властивість). Понятійне вираження «планета» не насичене, воно вимагає поповнення предмета ім'ям, інакше не можна вказати ні на істину, ні на неправду. Після заповнення ім'ям «Ранкова зірка» удосконалюється за допомогою зв'язки «є», що вказує на те, що дана пропозиція перебуває в стверджувальній формі. Пропозиція перетворюється у висловлення думки і претендує на істинність. Усі поняття (як і функції взагалі), мають одну і ту ж область визначення (Definitionsdereich), з якої беруться аргументи, і яка охоплює всі предмети універсуму. Під пробігом значень функції німецьким математиком передбачалося те загальне, що притаманне двом функціям. У разі збігу їхніх аргументів збігаються і їх значення. Г. Фреге не дає прямого визначення пробігу значень функції. Але не важко бачити, що це поняття близьке до такого, що зазвичай називають графіком функції, тобто сукупністю пар, у кожній з яких перший елемент – аргумент, другий – значення функції для аргументу. При цьому Г. Фреге мав на увазі функції одного аргументу. Саме введенням необмеженої ієрархії функцій була закладена антиномія у його системі, виявлена Б. Расселом. Але проблема антиномічності під фрегівською логічною системою повинна бути предметом самостійного дослідження.

В онтологічному аспекті при побудові своєї теорії Г. Фреге стає на платонівську позицію. В основі його розуміння логіки та її законів – переконання в їх об'єктивності, яка покладена на об'єктивність думки. Світ думки реальний, він має таке ж незалежне від людини існування, як і світ емпіричних реалій. Світ думки має нечасовий і неісторичний характер. У «Основоположеннях арифметики» німецький математик пише: «Я відмежовую об'єктивне від реального, просторового, реального (Wirkliches). Земна вісь, центр тяжкості Сонячної системи об'єктивні, але я не можу назвати їх реальними, на відміну від самої Землі. Екватор називають мислимою (gedachie) лінією, але було б неправильно називати цю лінію вигаданою; екватор не створюється мисленням, він не є результатом душевного процесу, виник за допомогою думки; він лише пізнається схоплюваною допомогою думки»[86]. У «Логічних дослідженнях Г. Фреге відмежовує три царства: об'єктивно-реального (фізичного), суб'єктивно-реального (психологічного) і об'єктивно-нереального. Як об'єктивно-нереальне розглядається непсихологічне, пропозиційне змісту оповідних речень. Число, думки Г. Фреге, «... так само безпідставно мати предметом психології або породженням психологічних процесів, що і, наприклад, Північне море. Таким чином, число є щось об'єктивне»[87]. Під названим поняттям Г. Фреге розумів незалежність не лише від процесів відчуттів, а й уявлень людини.

І в «Основоположеннях арифметики», і в «Обчисленнях понять» Г. Фреге, визначаючи свою позицію, підкреслював, що істина, як щось об'єктивне, не потребує для свого буття в пізнанні людини – носія думки. Мислення не створює, а лише схоплює істину. Цей процес німецький математик вважав найтаємничим з усього, з чим має справу людина. Відповідно до цього закони логіки не схожі на норми моралі чи закони права. Вони подібні до законів природи, які розкриваються природничими науками. Пізнані закони природи несуть у собі те загальне, яке визначено в природних процесах. Закони мислення неприродні, оскільки вони відносяться до буття істини. Саме тому закони мислення позачасові. Людина ж має просторово-часові характеристики. Г. Фреге визначає логіку як науку про найбільш загальні закони буття істини»[88], протиставляє істини, з якими має

[86] Фреге Г. Основоположения арифметики / Г. Фреге. – Томск : Изд. Водолей, 2000. – 127 с. – С. 54.

[87] Там само. – 127 с. – С. 53.

[88] Фреге Г. Логические исследования / Г Фреге // Логика и логическая семантика. –

справу логіка, і істини, які належать до психології.

Думки, Г. Фреге, складають зміст стверджувально-оповідних пропозицій, які можуть бути або істинними, або хибними. Звідси, для Г. Фреге, предметом аналізу є не пропозиція як знаково-символічна система, а виражена в ньому думка.

Побіжно коротко розглянемо таку значну проблему, як відношення Г. Фреге до психологізму в логіці. Зазначимо лише, що у вступі до своєї праці «Основоположення арифметики» німецький математик пише: «У цьому дослідженні я дотримуюсь основних правил:

- суворо відокремлювати психологічне від логічного, суб'єктивне від об'єктивного.

Щоб слідувати першому правилу, я завжди буду вживати слово «подання» у психологічному сенсі та відрізняти подання від понять і предметів»[89].

Сучасна логіка Г. Фреге, що орієнтується на психологію, що розвивається, у тому числі й в працях Дж. Міля, Б. Ердмана, була неприйнятна німецьким математиком, перш за все, у силу свого суб'єктивного характеру. Про це він розмірковує й в «Основоположеннях арифметики», і в «Обчисленнях понять». На його переконання, замість речей розглядаються їх суб'єктивні відображення, подання. Логіка, таким чином, утрачає зв'язок з істиною. На думку Г. Фреге, психологізована логіка розглядає суб'єкт (логічний підмет) і предикат (логічний присудок) судження, як подання. Якщо всі суб'єкти і предикати є лише уявленнями, то неможливо домогтися чогось об'єктивного. Згідно Г. Фреге, необхідним для логіки є правильне розуміння законів мислення.

У процесі судження виражається думка і відбувається перехід від думки до визнання її істинності. У статті «Про сенс значень» німецький математик писав: «Я розумію під думкою не суб'єктивну діяльність мислення, але його об'єктивний зміст, що може бути спільним надбанням багатьох»[90]. Таке фундаментальне переконання Г. Фреге.

Для розуміння фрегівської неприйнятності психологізму в логіці необхідне уточнення такого поняття як математичний об'єкт. Підхід до таких об'єктів, у силу своєрідності їх буття в чомусь інструментальний. Математика має справу, по-перше, з вихідними об'єктами, прийнятими

М. : Аспект Пресс, 2000. – 510 с. – С. 307.

[89] Фреге Г. Основоположения арифметики / Г. Фреге. – Томск : Изд. Водолей, 2000. – 127 с. – С. 23.

[90] Фреге Г. Логические исследования / Г Фреге // Логика и логическая семантика. – М. : Аспект Пресс, 2000. – 510 с. – С. 234.

на основі очевидності, по-друге, з об'єктами похідними, отриманими на основі різних внутрішніх визначень. Відмітною ознакою вихідних об'єктів є безумовна очевидність їх властивостей. Похідні об'єкти, як правило, не володіють цією якістю. Математична теорія, починаючи з інтуїтивно ясних об'єктів, неминуче сходить до конструкцій, які, будучи чітко визначені, тим не менш, позбавлені безпосередньої ясності властивостей.

При побудові і розвитку математичної теорії її об'єкти володіють двома особливостями, найважливіша з яких – заданість математичного об'єкта кінцевим числом властивостей. Друга особливість математичних об'єктів – їх сувора підпорядкованість. У процесі розвитку математичної теорії її об'єкти шикуються в жорсткій ієрархії, яка не залежить як від свавілля окремого математика, так і математичного співтовариства в цілому. Мислення математика за необхідності вимагає інструментальності, алгоритмічності, доказовості, логічної стрункості, але не мистецтва герменевтики. В основі фрегівського «подання в психологічному сенсі» лежить кантівське трактування «суджень сприйняття».

За І. Кантом «Усі наші судження спершу лише судження сприйняття; вони значущі лише для нас, тобто для нашого суб'єкта, і лише після, ми надаємо нове відношення, а саме ставлення до об'єкта, і хочемо, щоб вони були значимі і для нас, і для всіх інших; адже якщо одне судження узгоджується з предметом, то і всі судження про той же предмет повинні узгоджуватися між собою, так що об'єктивна значущість судження досвіду є ні що інше, як його необхідна загальна значимість. ... Це грунтується не на сприйнятті, а завжди на чистому прагматичному понятті, під яке сприйняття підводиться»[91].

Об'єкти – «подання в психологічному сенсі», таким чином, істотно відрізняються від математичних об'єктів. Вони нескінченні в тому контексті, що їх теоретичне визначення лише намічає систему якостей і не виключає відкриття якостей, які не узгоджуються з початковим визначенням, яке не задає об'єкт, а лише вказує на неї, як на деяку сутність, що володіє нескінченним числом незалежних один від одного властивостей. На відміну від цього, усі властивості математичного об'єкта визначено кінцевим числом вимог, зафіксованих в аксіомах або в його вихідних визначеннях.

[91] Кант И. Пролегомены ко всякой будущей метафизике, которая может появиться как наука / И. Кант. Соч. в 8-ми т. Т. 4. – М. : Чоро, 1994. – 630 с. – С. 55.

Як висновок зазначимо для читача, що філософсько-математична система Г. Фреге, у контексті обґрунтування логічного напряму в математиці, має інструментальний характер при трактуванні надійності та очевидності висновків математичних міркувань. Завдання, поставлені німецьким математиком, лише на перший погляд, далеко стоять від вагомих проблем філософії. Так, послідовна критика психологізму відродила в кінці XIX – початку XX століття, у противагу суб'єктивізації опису пізнавальних процесів, «реалізм» у логіці й математиці, який вплинув на феноменологію. Подібно до логічного вчення Аристотеля, ядро якого силогістика, зберігши своє значення на століття, з часом обросла уточненнями, обмеженнями, або розширеннями, внесок Г. Фреге логіку – створення класичного числення предикатів, на десятиліття зберігаючи свою значущість, став в наступний період об'єктом розробки в різних напрямках.

Логічна теорія Г. Фреге, як і вчення Стагирита, у своїй основі також не реформована. Її можна або прийняти (що і було зроблено в класичній математичній логіці), або відкинути, запропонувавши альтернативні підходи. Виявлені Б. Расселом парадокси не зменшують значущості робіт німецького математика. На подальший розвиток логіки і математики пропедевтичне завдання створення нової логіки справило набагато більший вплив, ніж сама логістична програма.

ВИСНОВКИ

Історія логіки охоплює близько двох з половиною тисячоліть. У довгій і багатій подіями історії розвитку логіки чітко виділяються два основних етапи – дві парадигми побудови логічного знання. Перший – від давньогрецької (традиційної) логіки до виникнення у другій половині минулого століття сучасної (класичної) логіки. Другий – із зазначеного часу до наших днів. Зауважимо читачеві, що дві парадигми у побудові логічного знання існують у діалектичній єдності. Кожна парадигма виробляла особливий інструмент пізнавальної діяльності, систематизоване знання про форми мислення. На першому етапі, званому традиційною логікою, що обговорювалися в ній проблеми мало чим відрізнялися від проблем, поставлених ще Аристотелем. Це дало привід німецькому філософу І. Канту (1724–1804) прийти до висновку, про те, що формальна логіка є завершеною наукою, не просунулася з часів Аристотеля ні на один крок. Однак, підкреслимо, що для читача, ще з XVII століття стали назрівати передумови для наукової революції в логіці. Саме в цей час отримала ясне вираження ідея представити доказ як обчислення, подібне обчислення в математиці. Зазначена ідея пов'язана головним чином з ім'ям німецького філософа і математика Г. Лейбніца (1646–1716).

За Г. Лейбніцом, обчислення суми або різниці чисел здійснюється на основі простих правил, які беруть до уваги лише форму чисел, а не їх зміст. Результат обчислення однозначно зумовлюється такими, що не допускають різночитання правилами, і його не можна оскаржити. Виділимо, що Г. Лейбніц мріяв про те, що умовивід буде перетворено в обчислення. Коли це станеться, звичайно між філософами суперечка; стане так само неможливе як неможливе між обчислювачами. Замість суперечки вони візьмуть в руки пір'я і скажуть: «Будемо обчислювати». Ідеї Г. Лейбніца надали помітного впливу на його сучасників. Енергійний розвиток логіки почалося пізніше, в XIX столітті. Німецький математик і логік Г. Фреге (1848–1925) у своїх роботах став застосовувати формальну логіку для дослідження підстав математики. Г. Фреге був переконаний, що «арифметика є частина логіки і не має запозичень ні з досвіду, ні у споглядання з ніякого обґрунтування». Намагаючись звести математику до логіки, він реконструював останню.

Логічна теорія Г. Фреге – провісник усіх нинішніх теорій правильного міркування. Ідея відомості всій чистої математики до логіки була підхоплена англійським логіком і філософом Б. Расселом

(1872 – 1970). Але подальший розвиток логіки показало нездійсненність цієї грандіозної за своїм задумом спроби. Вона призвела, однак, до зближення математики та логіки і широкому проникненню плідних методів першої в другу.

Доктор астрономії Казанського університету, логік і математик П. Порецький стверджував, що це по своєму предмету є логіка, але за методом своєму, вона математика. Дослідження П. Порецького продовжують надавати стимулюючий вплив на розвиток алгебраїчної логіки теорій і в наші дні. М. Васильєв у якості логіки уявного світу запропонував свою теорію без закону протиріччя, довгий час вважався центральним основоположенням логіки. М. Васильєв вбачав необхідним обмежити дію закону виключеного третього. М. Васильєв став одним із попередників логіки наших днів. Ідеї М. Васильєва за його життя піддавалися жорсткій критиці, у результаті він залишив заняття логікою. Знадобилося півстоліття, перш ніж його «уявна логіка» без законів протиріччя і виключеного третього була високо оцінена. Ідеї, що стосуються обмеженого застосування закону виключеного третього і близьких йому способів математичних доказів були розвинені математиками А. Колмогоровим, В. Гливенком, А. Марковим та іншими. У результаті виникла конструктивна математика, яка вважає неправомірним перенесення низки логічних принципів, застосовних у міркуваннях кінцевих множин, на область нескінченних множин. Фізик В. Еренфест першим висловив гіпотезу про можливість застосування сучасної йому логіки в техніці.

Гіпотеза П. Еренфеста отримала втілення в теорії релейно-контактних систем. Зазначимо для читача, що сучасну логіку нерідко називають математичною, підкреслюючи своєрідність її нових методів у порівнянні з використанням раніше в традиційній логіці. Одна з характерних рис цих методів – широке використання різноманітних символів замість слів та виразів звичайної мови. Проте підкреслимо, що символи застосовували в ряді випадків ще Аристотель, а потім і всі наступні логіки. Нині у використанні символіки був зроблений якісно новий крок. У логіці стали використовуватися спеціально побудовані мови, що містять лише спеціальні символи і не включають жодного слова звичайної розмовної мови. Широке використання символічних засобів стало підставою того, що, нову логіку стали називати символічною. Назви «математична логіка» та «символічна логіка», зазвичай вживаються й зараз, позначають одне і те ж – сучасну формальну логіку. Вона займається тим же, чим завжди займалася логіка – дослідженням правильних способів міркування.

Укажемо для читача, що з моменту свого виникнення логіка була найтіснішим чином пов'язана з філософією. Протягом багатьох століть логіка вважалася однією з «філософських наук». Лише у другій половині XIX століття формальна – до цього часу вже математична – логіка відокремилася від філософії. Вирішальну роль зіграло проникнення в неї математичних методів і зближення з математикою. Математична логіка виникла на перший погляд на стику двох настільки різних областей знання, як філософія, або точніше – філософська логіка і математика. Проте взаємозв'язок нової логіки з філософією не лише не обірвався, але, навпаки, зміцнів. Звернення до філософії є необхідною умовою прояснення логікою своїх підстав. З іншого боку, використання у філософії понять, методів та апарату сучасної логіки, безсумнівно, сприяє більш ясному розумінню самих філософських понять, принципів і проблем.

Тісний зв'язок сучасної логіки з математикою надає особливу гостроту питання про взаємних відносинах цих двох областей знання. Згідно Г. Фреге, Б. Рассела і їх послідовникам, математика і логіка – це всього лише два ступені в розвитку однієї і тієї ж науки. Математика може бути зведена до логіки, і таке чисто логічне обґрунтування математики дозволить встановити її справжню і найбільш глибоку природу. Цей підхід до обґрунтування математики отримав назву логіцизма.

Прихильники логіцизма досягли певних успіхів у проясненні основ математики. Зокрема, було показано, що математичний словник зводиться до несподівано короткому переліку основних понять, які належать словником чистої логіки. Уся існуюча математика була зведена до порівняно простої і уніфікованої системи вихідних положень, які приймаються без доведення, або аксіом і правил, або теорем. Проте в цілому логіцизм виявився утопічною концепцією.

Математика не зводиться до логіки, оскільки для побудови математики необхідні аксіоми, що встановлюють існування в реальності певних об'єктів. Але такі аксіоми мають вже позалогічу природу. Іншою формою об'єднання математики і логіки в одну науку було оголошення математичної, чи сучасної логіки одним з розділів сучасної математики. Математику і зараз ще вважають головною, якщо не єдиною – завданням математичної логіки уточнення поняття математичного доказу. Особливо підкреслимо для читача, що тенденція включає математичну логіку в число математичних дисциплін і бачити в ній лише теорію математичного доказу є помилковою. Завдання логіки набагато ширше. Вона досліджує основи всякого правильного міркування, а не лише суворого математичного доказу, зв’язок між посиланнями і наслідками у будь-яких галузях міркування і пізнавальної діяльності.

Як підтвердження сказаного, виділимо ту обставину, що сучасна логіка тісно пов’язана з кібернетикою – наукою про закономірності управління процесами і системами в будь-яких сферах діяльності: у техніці, у живих організмах, у суспільстві. Основоположник кібернетики американський математик Н. Вінер не без підстав наголошував, що саме виникнення кібернетики було б немислимо без математичної логіки. Автоматика і електронно-обчислювальна техніка, що застосовуються в кібернетиці, були б неможливі без використання алгебри, логіки – так виник перший розділ сучасної логіки. Крім кібернетики сучасна логіка знаходить широкі програми та в багатьох інших областях науки і техніки.

Розділ 2
ЕЛЕМЕНТИ КЛАСИЧНОЇ ЛОГІКИ

Вже зазначалось, що логіка вивчає абстрактне мислення людини. Але важливо встановити, які саме сторони людського мислення вивчає наука логіка. Необхідно звернути увагу на ті сторони мислення, взаємозв'язок між якими й складає предмет логіки:

1. Логіка не вивчає чуттєво-образного мислення, можливості якого обмежені, оскільки воно не в змозі відділити істотне від неістотного, а є лише підґрунтям пізнавального процесу. Логіка вивчає абстрактне мислення, котре пізнає глибину істотних відношень між об'єктами.
2. Логіка вивчає ряд притаманних абстрактному мисленню операцій: порівняння, узагальнення, визначення, класифікацію й такі його специфічні форми, як поняття, судження, умовивід.
3. Логіка вивчає мислення як процес, підпорядкований певним законам.
4. Логіка вивчає структуру форм абстрактного мислення (понять, суджень, умовиводів, гіпотез та ін.), тобто визначає конкретні способи функціонування процесів мислення.
5. Предметом логіки також є дія основних законів мислення, тобто способів взаємозв'язку між окремими його елементами, що забезпечують правильність здійснення тих чи інших логічних операцій.

Відповідно до предмета вивчення виділяються чотири основних відносно самостійних галузі у сучасній логіці:

Формальна логіка – наука, що вивчає думки з боку їх структури, відволікаючись від їх зміни та розвитку; формальна логіка вивчає закони, яким підпорядковується думка в процесі одержання вивідного знання; формальна логіка виявляє операції, які застосовуються до різних форм мислення.

Класична, або математична логіка користується математичними методами й спеціальним апаратом символів. Вона вивчає мислення за допомогою формалізованих мов, розглядає форми кількісних характеристик предметів.

Діалектична логіка – це наука про форми та закони мислення, які складають відображення об'єктивного світу. Вона вивчає закономірності започаткування й розвитку нашої свідомості, фіксує відношення, переходи, суперечності, зв'язки, в яких відображаються предмети й явища навколишнього світу. Діалектична логіка становить собою систему категорій, яка, відображаючи в загальних рисах закони розвитку об'єктивного світу, тим самим описує й рух людського пізнання до істини. Це застосування діалектичного методу до аналізу людського мислення й пізнання, конкретизація загальних його принципів в формах й законах мислення. Це наука про найбільш загальні закони виникнення та розвитку мислення як відображення діалектики об'єктивного світу у свідомості людини та її пізнанні.

Деонтична логіка або логіка норм – розділ логіки, де досліджується структура та логічні зв'язки нормативних висловлень із значеннями «обов'язково», «дозволено», «заборонено», «байдуже». Ці значення є першим елементом логічної норми. Другий елемент деонтичної логіки зміст – дія, яка може, повинна чи не повинна бути виконаною; третій – умови застосування; четвертий – суб'єкт – особа чи група осіб, котрим адресована норма. Деонтична логіка має особливе значення для правознавчої практики (як правотворчої, так і правоохоронної).

2.1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАКОНІВ ЛОГІКИ

Предметом вивчення логіки в тому числі і класиченої є закони вивідного знання. Серед них виділяються чотири основних. Це закон тотожності, закон несуперечності, закон виключеного третього закон і достатньої підстави.

Формально-логічні закони не є законами «чистої думки», незалежними від зовнішнього світу. Вони виражають корінні властивості мислення: визначеність, несуперечність, послідовність і обґрунтованість. Вони склалися на базі багатовікової практики людського пізнання як своєрідне відображення певних властивостей і відношень предметів дійсності: їх якісної визначеності, відносної стійкості, обумовленості іншими предметами. Кожен предмет, незважаючи на зміни, що з ним відбуваються, залишається відносно стійким, якісно визначеним предметом з притаманними йому властивостями, що дає змогу відрізняти його від інших предметів. Разом з тим, він існує не сам по собі, його існування обумовлено іншими предметами. Якісна визначеністю предметів та їх властивостей, їх відносна стійкість, їх взаємна обумовленість – об'єктивна основа формально-логічних законів.

Закони логіки є загальнолюдськими законами. Вони діють у всякому мисленнєвому акті, в усіх областях знань, на усіх рівнях мислення, як у сфері побутового мислення, так і у сфері мислення, що пізнає найскладніші наукові проблеми.

Закони логіки є знаряддям пізнання дійсності, необхідною умовою адекватного відображення дійсності мисленням. Щоб мислення вело нас до істинних знань, воно повинно відповідати вимогам формально-логічних законів. Вони виступають своєрідними принципами міркування, дотримання яких забезпечує визначеність, послідовність, доказовість, тобто правильність мислення. Особливо це стосується правової діяльності, основна мета якої – досягнення істинного знання.

2.1.1. Закон тотожності

Закон тотожності говорить, що кожна думка повинна бути визначеною, тобто чіткою за змістом і обсягом і не змінюватися у процесі міркування іншою думкою. Це корінна властивість мислення: всяка думка у процесі міркування повинна бути тотожною самій собі. Думка тотожна самій собі тоді, коли вона стосується одного і того ж предмета і її зміст залишається одним і тим же. Якщо ж зміст думки змінюється чи вона стосується вже іншого предмета, то така думка не може вважатися тією ж самою, тотожною самій собі, ми будемо мати справу уже з іншою думкою. **Тобто:** **А є А або А↔А**

Об’єктивною підставою закону тотожності, його витоком є якісна визначеність Предметів і явищ навколишньої дійсності. Зміст закону тотожності полягає у таких його вимогах:

1. У процесі міркування про якийсь предмет необхідно мислити саме цей предмет і не можна підміняти його іншим предметом думки. Так, якщо ми обговорюємо вчинок, наприклад, Іванова, то ми Повинні обговорювати Іванова, а не когось іншого, і саме цей його вчинок; а не якийсь інший. Закон тотожності вимагає, щоб у процесі розмірковування був виділений один предмет міркування і цей предмет не підмінювався якимось іншим предметом думки даної предметної області.

2. В процесі міркування, суперечці чи дискусії поняття повинні вживатися в одних і тих же значеннях. Думка тотожна сама собі, якщо вона однозначна.

Закон тотожності не припускає вживання поняття в межах якогось міркування в різному значенні. Усяка думка повинно бути однозначною. Поняття, якими користуємося, повинні вживатися протягом усього міркування, скільки б разів вони не вживались а одному і тому же значенні, повинні зберігати незмінними свій обсяг і свій зміст. Якщо ж поняття і терміни вживаються у процесі міркування неоднозначне то мислення стає невизначеним, і мисленевий процес не досягає мети.

Порушення вимог закону тотожності нерідко пов’язане з різним вираженням однієї й тієї ж думки у мові. Наприклад: «Іванов вчинив злісне хуліганство» і «Іванов вчинив злочин, передбачений ч.11 ст.206КК України» – (виражають одну і ту ж думку, якщо йдеться про одну і ту ж особу). Предикати цих суджень рівнозначні. Тому ці думки є тотожними.

З іншою боку, вживання багатозначних слів, слів-омонімів може призвести до помилкового ототожнення різних думок. Наприклад, словом «штраф» позначають вид покарання, передбачений кримінальним кодексом, і захід адміністративного покарання. Очевидно, ці поняття мають різний зміст і вживання їх в одному значенні призводить до помилок у міркуванні.

Ототожнення різних думок може статися й через те, що різні люди залежно від власного досвіду, професії тощо вкладають в одна і те ж поняття різний сенс. Так під наклепом юрист розуміє кримінальний злочин, що полягає у розповсюдженні попередньо неправдивих домислів, які ганьблять іншу особу передбачене ст.125 ККУ. Людина, котра не має відношення до юридичної практики, може вкладати в це поняття більш широкий сенс, розуміючи під наклепом усяку неправду. Подібні випадки часто зустрічаються у слідчій практиці, коли обвинувачений чи свідок не знають точного змісту понять і розуміють їх інакше ніж юрист. Це призводить до плутанини, утруднює з’ясування суті справи.

При розслідуванні будь-якої справи важливо з’ясувати точний смисл понять, якими користуються обвинувачуваний та свідки, і вживати їх у строго визначеному сенсі. В протилежному випадку предмет думки буде випущено і. замість з’ясування справи станеться її заплутування.

2.1.2. Закон несуперечності

Логічне мислення відзначається несуперечністю. Вимога несуперечності мислення виражає формально-логічний закон несуперечності: два несумісних одне з одним судження не можуть бути одночасно істинними; у всякому разі одне з них з необхідністю хибне.

Так, наприклад, не можуть бути одночасно істинними судження:

«Н. є співучасником даного злочину».

«Н. не є співучасником даного злочину».

Закон несуперечності формулюється так: «невірно, що А і не А», тобто не можуть бути істинними дві думки, одна з яких перечує іншу. В символічній логіці закон несуперечності записується формулою $\sim(A \wedge \sim A)$ (не можна визнати одночасно істинними А і його заперечення).

Питання про те, яке з двох суперечних суджень є хибним, закон несуперечності не вирішує. Для дотримання цього закону потрібно зважати на такі умови:

1. Якщо ми стверджуємо приналежність предмету однієї ознаки і водночас заперечуємо притаманність тому ж предметові іншої ознаки, ніякої суперечності не буде.

2. Не буде суперечності між судженнями і у випадку, якщо йдеться про різні предмети, наприклад, про різні злочини: один з них може бути умисним, другий – неумисним (необережним).

3. Суперечності не буде і у випадку, якщо ми щось стверджуємо і те ж саме заперечуємо стосовно однієї особи, але розглядаємо її у різний час. Припустимо, що звинувачений **Р**. на початку слідства дав неправдиві свідчення, але у кінці слідства він був змушений під тягарем викриваючих доказів дати правдиві свідчення і признатися. У такому разі судження: «Свідчення звинувачуваного **Р**. є неправдивими» і «Свідчення звинуванного **Р**. є істинними» – не суперечать одне одному, оскільки в них один і той же предмет розглядається у різних часових проміжках.

4. Нарешті, один і той же предмет нашої думки може розглядатися у різних відношеннях. Так, про курсанта П. ми можемо казати, що він добре знає англійську мову, оскільки рівень його знань відповідає вимогам навчальної програми. Тоді ми маємо право стверджувати: «П. добре знає англійську мову». Однак цих знань недостатньо, щоб працювати перекладачем. Тоді ми з повни правом можемо стверджувати: «П. погано знає англійську мову». В обох судженнях знання П. англійської мови розглядається з точки зору різних вимог, отже, ці судження також не суперечать один одному.

Закон несуперечності, як і закон тотожності, відображає якісну визначеність предметів, той простий факт, що якщо предмету властива якась ознака, то вона не може бути водночас йому невластивою. У об’єктивній дійсності не буває так, щоб одне й теж одночасно було, й не було притаманним якомусь предмету

2.1.3. Закон виключеного третього

Закон несуперечності діє стосовно усіх несумісних одне з двох суджень – і противних, і суперечних. Він встановлює, одне з них обов’язково хибне. Щодо іншого судження, то воно може бути істинним, але може бути і хибним. Закон виключеного третього стосується лише суперечних суджень і формулюється таким чином:

Два суперечних судження не можуть бути одночасно хибними одне з них обов’язково стине. **Або: А є або В або не В.**

З двох суперечних суджень про один і той же предмет, в один і той же час і у одному і тому ж відношенні одне обов’язково стине, а друге хибне; третього бути не може. У символічній логіці він записується за допомогою диз’юнкції:

А або ~А,

де А – будь-яке судження, ~А – заперечення судження А. Обидва судження об’єднанні знаком диз’юнкції. Об’єднавши закон виключеного третього з законом несуперечності, отримаємо таке положення: два суперечних судження не можуть бути разом істинними і не можуть бути разом хибними.

Так, якщо хибним є судження «Усі вироки суду є обвинувальними», то істинним є судження «Деякі вироки суду не є обвинувальними». Те ж саме стосується і загальнозаперечіих і частковостверджуючих суджень. З істинності судження «Рішення суду є законним і обґрунтованим» випливає хибність судження «Рішення суду не є законним і обґрунтованим».

Як і закон суперечності, закон виключеного третього відбиває послідовність, несуперечність мислення. Разом з тим, він вказує, що не лише двоє з суперечних суджень не можуть бути одночасно істинними але й одночасно хибними: якщо одне з них хибне, то інше обов’язково істинне, і третього не дано.

Якщо закон несуперечності стосується як контрарних так і контрадикторних суджень, то закон виключеного третього лише контрадикторних.

2.1.4. Закон достатньої підстави

Наші думки про будь-які факти, явища, подію можуть бути істинними або хибними. Якщо ми висловлюємо певну думку, вважаючи її істинною, то ми повинні обґрунтувати цю істинність. Це значить, що ми повинні довести її відповідність дійсності. Наприклад, висуваючи обвинувачення проти якоїсь особи, потрібно мати певні докази, обґрунтувати істинність свого твердження. Інакше, звинувачення буде необґрунтованим. Вимога доведеності, обґрунтованості думок виражається у законі достатньої підстави. Закон формулюється: «Всяка думка визнається істинною, якщо вона має достатню підставу»:

Якщо є А, то є і В, або В є тому, що є А.

Достатньою підставою для певної думки може бути особистий досвід людини. Істинність деяких суджень може бути встановлена завдяки їх зіставленню з фактами дійсності. Так, якщо людина з якихось причин була присутньою при скоєні злочину, то для неї підставою істинності судження «Р. скоїв злочин» буде сам факт злочину, свідком якого вона була. Але особистий досвід, обмежений. Тому людині в її діяльності доводиться спиратися на досвід інших людей, наприклад, на свідчення очевидців тієї чи іншої події. Саме до таких підстав звертаються звичайно у слідчій практиці при розслідуванні злочинів.

Для того, щоб підтвердити певний випадок, його потрібно обґрунтувати. Але це не обов’язково робити за допомогою особистого досвіду. Якщо нам, наприклад, відомі певні закони фізики чи хімії, то немає потреби кожен раз наново ставити досліди і доводити їх. Те ж саме стосується перевірених практикою методів, наприклад, криміналістичного дослідження, уже саме знання і правильне застосування яких може бути достатньою підставою для отримання істинних знань.

Таким чином, достатнім обґрунтуванням якоїсь думки може стати будь-яка інша, уже перевірена і визнана за істину думка, з якої з необхідністю випливає істинність даної думки. Якщо з істинності судження А випливає судження В, то А буде підставою для В, а В – наслідком цієї підстави. Зв’язок підстави і наслідку можна показати за допомогою імплікації $A \rightarrow B$, де А – підстава. В – наслідок. У деяких випадках підстава сама потребує обгрунтованості своєї істинності. Якщо судження С обгрунтується на підставі В, то В може потребувати у свою чергу підстави А. Перед нами уже ряд суджень, які пов’язані таким чином: $\mathbf{A \rightarrow B \;\&\; B \rightarrow C}$

Велике значення закон достатньої підстави має у слідчій та судовій практиці. До того ж це не лише логічна вимога. Дотримання даного закону є юридичною вимогою, воно стає необхідною умовою пізнання об’єктивної істини у слідстві чи судочинстві та дотримання законності.

2.2. ПОНЯТТЯ ТА ОПЕРАЦІЇ З НИМИ

2.2.1. Поняття як множина. Множина, її елементи, включення множин

Сукупність властивостей і відносин (ознак) предметів, відбитих в понятті, складають зміст поняття. Всякому поняттю відповідає безліч предметів, кожний з яких володіє ознаками, зафіксованими в змісті поняття. Ця множина називається об'ємом поняття

Під множиною розуміється клас, сукупність, збори різноманітних предметів, байдуже якої природи. Відповідно до визначення, що дав засновник теорії множин Г. Кантор, множиною є будь-які збори визначених і різноманітних об'єктів нашої інтуїції, які мисляться як єдине ціле. Істотно насамперед те, що збори предметів розглядаються як один предмет, мислиться як єдине ціле.

Не слід розуміти множину як сукупність дійсно існуючих предметів, що володіють усіма реальними характеристиками, наприклад, визначеними просторовими або тимчасовими властивостями. Приналежність до множини не потребує співіснування в часі і просторі: усі математики утворять один клас, хоча і живуть у різних країнах; Аристотель і Г. В. Ф. Гегель належать до множини видатних філософів, хоча вони жили в різний час.

Множина в символічній логіці – це «абстрактний об'єкт», у котрому кожна його складова розглядається лише з погляду ознак, що утворюють зміст визначеного поняття. Всім предметам однієї множини ми приписуємо однакові ознаки, відмінність їх один від одного визначається по їх іменам.

Предмет, що належить даній множині, називається його елементом. Елементи множини позначаються – x, y, z, … (або x_1, x_2, x_3, …) а самі множини – A, B, C, …

Якщо множина містить кінцеве число елементів, її називають кінцевою, якщо в неї нескінченно багато елементів – безкінцевою.

Знаком $\in$ позначається відношення приналежності елемента до тої або іншої множини. Вираз $\boxed{x \in A}$ означає, що елемент **x** належить множині **A.** Якщо **x** не є елементом множини **A**, то це записується так $\boxed{x \notin A}$.

Якщо дві множини A и B складаються (кількісно та якісно) з одних і тих самих елементів, то вони рахуються рівними. Якщо A і B рівні, то записують A = B, у іншому випадку – A ≠ B. Так {2, 4, 6} є множина, що складається з трьох перших позитивних парних чисел. Оскільки {2, 4, 6} і {2, 6, 4} складаються з тих самих елементів, вони є рівними множинами. По цій же причині {2, 4, 6} = {2, 4, 4, 6}.

Елементи якоїсь множини самі можуть бути множинами. Наприклад: {{1, 3}, {2, 4}, {5, 6}} є множина з трьох елементів, саме {1, 3}, {2, 4}, {5, 6}.

Множини {{1, 2}, {2, 3}} і {1, 2, 3} не рівні, елементами першої є {1, 2} і {2, 3}, а елементами другої – 1, 2 і 3.

Множини {{1, 2}} і {1, 2} також не рівні, оскільки перша множина, складається з одного і лише одного елемента – {1, 2} (одноелементна множина), а друга має своїми елементами 1 і 2. У загальному вигляді, слід розрізняти предмет і множину, єдиним елементом якої є цей предмет.

Множину вважають заданою, якщо володіємо засобом, котрий дає змогу для будь-якого даного предмета вирішити, чи належить він цій множині або ні, тобто визначити істинно або ні висловлення $x \in A$ (при відповідному значенні змінних x і A).

Задати множину можна різноманітними засобами. Один із них складається в тому, що задається повний список елементів, які входять у множину. Якщо необхідно сказати, що множина A складається з елементів x_1, x_2, x_3, … x_n, то записуємо A: = {x_1, x_1, x_3, … x_n}... Наприклад, множина арифметичних дій складається з елементів додавання, вирахування, множення і розподілу.

Засіб завдання елементів списком застосовується лише для кінцевих множин, але не до усіх. Наприклад, хоча множина риб кінцева, навряд чи можна задати її списком. Тим більш, список неможливий у випадку безкінцевої множини.

Застосовується інший засіб, що складається в завданні множини характеристичними предикатами, тобто вказівкою такої властивості, (предиката), яка належить будь-якому предмету, котрий є елементом даної множини, і не належить жодному предмету, що не є її елементом

(M: = {x │ P(x)} - «множина усіх x, що володіють властивістю P»).

У символічній логіці варто ототожнювати такі поняття: **<u>властивість ≡ предикат</u>**

Множина може бути задана також процедурою, що породжує саму множину M: $\{x \mid x := f\}$.

ЗАСОБИ ЗАВДАННЯ МНОЖИН	
<u>Перерахуванням елементів</u>:	$\mathbf{M := \{a_1, a_2, \dots a_n\}}$;
<u>Характеристичним предикатом</u>	$\mathbf{M := \{x \mid P(x)\}}$;
<u>Процедурою, що породжує множину</u>	$\mathbf{M := \{x \mid x := f\}}$.

Два перші засоби завдання множин припускають, що є можливість ототожнювати та розрізняти предмети. Але така можливість існує не завжди, у цьому випадку виникають різноманітного роду ускладнення. Так, може бути, що дві різноманітні характеристичнi властивості задають ту саму множину, тобто кожний елемент, що володіє однією властивістю, володіє й іншим, і навпаки. Наприклад, в арифметиці властивість «ціле число ділиться на 2» задає ті ж множини, що і властивість «остання цифра числа ділиться на 2». У багатьох випадках мова йде про збіг двох множин (наприклад: множини рівнобічних трикутників із множиною рівнокутних трикутників). Крім того, при завданні множин характеристичним предикатом труднощі виникають через недостатню визначеність, неоднозначність природної мови. Розмежування об’єктів на приналежні і ті, що не належать даній множині, ускладнюється також і наявністю великого числа проміжних форм.

Особо виділяється універсальна множина, тобто така множина, яка складається з усіх елементів досліджуваної предметної області (вона позначається літерою U, а в геометричній інтепретації зображується множиною крапок у середині прямокутника).

Порожня множина – не містить жодного елемента (позначається символом $\varnothing$). Якщо множина задана своїми характеристичними властивостями, то вона не завжди заздалегідь відома, але дійсно існує хоча б один елемент із такими властивостями. Наприклад, невідомо, чи порожня множина всіх натуральних чисел n таких, що $n > 2$, а рівняння $x_n + y_n = z_n$ має позитивні цілочислені рішення (у цьому складається знаменита проблема Ферма). Багато логічних проблем можна сформулювати як твердження про порожню множину.

Парадокс Бертрана Рассела

Завдання множини характеристичним предикатом може призводити до протиріч. Наприклад, усі множини не містять себе в якості свого елемента $Y = \{X \mid X \notin X\}$ – множина Y не містить сама себе в якості свого елемента. Якщо множина Y існує, то ми повинні мати можливість відповісти на таке питання:

Нехай $Y \in Y$, тоді $Y \notin Y$. Нехай $Y \notin Y$, тоді $Y \in Y$

У цьому випадку утворюється логічне протиріччя, що відомо як парадокс Бертрана Расела. Існують три засоби уникнути цього протиріччя.

1. **Обмежити використовувані характеристичні предикати у вигляді**

$P(x) = x \in A \wedge Q(x)$

A – відома, існуюча множина (універсум). При цьому використовується позначення $\{x \in A \mid Q(x)\}$, для Y універсум не зазначений, а тому, Y множиною не є.

2. **Теорія типів**. Об’єкти мають тип 0, множини мають тип 1, множини множин мають тип 2 і т.д. Y не має типу і множиною не є.

3. **Характеристичний предикат P(x) заданий у вигляді функції**, що обчисляється. Засіб обчислення значення предиката $X \in X$ не заданий, а тому Y множиною не є.

Останній із перерахованих засобів лежить в основі конструктивізму – напрямку в математиці, у рамках якого розглядаються лише такі об’єкти, для яких відомі процедури їх породження. У конструктивній математиці виключаються з розгляду деякі поняття і методи класичної математики, що чреваті можливими парадоксами.

Підмножини

Будь-яку частину множини називають підмножиною. Якщо деяку універсальну множину задати характеристичним предикатом P – U= $\{x \mid P(x)\}$, то множини A, B, C, …, які є частинами U , визначаються властивостями P_a, P_b, P_c, … Отже підмножина A визначається $A \overset{Dt}{=} \{x \mid x \in U \ и \ P_a(x)\}$ («A є по визначенню множина всіх тих і лише тих x, що належать U і мають властивість P_a»). Якщо, наприклад U – множина людей, а P_a – бути учнем вищого навчального закладу, то A – множина студентів.

Якщо властивості, якими задана множина і її підмножина, збігаються, то ці множини будуть рівні. Рахується, що множина є частиною самої себе, або «цілком частиною».

Якщо предикат, котрим задається підмножина, суперечить предикату, за допомогою якого задана сама множина, то ця підмножина буде порожньою. Порожня множина є частиною будь-якої множини.

Повну і порожню частини називають невласними множинами. Всі інші підмножини є власними.

Якщо відомо число елементів даної множини, то загальне число підмножин буде 2^n (де n - число елементів). З порожньої множини можна утворити лише одну підмножину – сама порожня множина (при $n = 0, 2^0 = 1$).

Якщо предмет позначити X, а його характеристичний предикат P, то об’єм поняття, що відбиває цей характеристичний предикат, буде множиною, кожний елемент якої, підставлений на місце перемінної X в формулі P(x), буде давати істене судження.

Нехай у формулі P(x) P означає «бути непарним», тоді замість x можуть бути підставлені змінні 1, 3, 5, 7 і т.д., при цьому ми одержуємо істині судження («1 – непарне число», «3 – непарне число» і т.д.).

Вираз P(x) однаковий за змістом з виразом $x \in P$. Так говорячи про властивість «бути непарним», розуміємо множину предметів, кожен з яких має цю властивість.

Говорячи про будь-який предмет, визначаємо не лише властивості, якими він володіє, а й відношення до інших предметів, які його характеризують.

Відношення позначаються буквою R (перша буква латинського слова Relatio - відношення). Вираження xRy або R(x, y) читається: «предмет x перебуває до предмета в y відношенні R».Такі поняття як «більше», «менше», «дорівнює» «причина», «функція», відбивають визначене відношення між предметами. Наприклад, для відношення «менше» необхідно два предмети, щоб відбити значуще припущення («2 менше 3», «5 менше 4» – пропозиції, перша з яких виражає істене висловлення, а друга – помилкове).

Пари предметів, утворюючі об’єм поняття «менше», є упорядкованими, тому, пара 2 і 3 входить в об’єм даного поняття, а 5 і 4 ні. У загальному виді цю обставину можна записати $<x, y> \in R$, що означає «упорядкована пара x, y, є елементом R». Розглядаємо відношення R як множину упорядкованих пар елементів. Такого роду відношення називають двомісними. Можуть бути трьохмісні і т.д. відношення.

Об’єм поняття, який відбиває відношення між предметами, складає множину упорядкованих пар (трійок, четвірок і т.д.), що пов'язані з R визначеними властивостями. Пари, які входять у визначене поняття, утворюють істині висловлення.

Знаком $\subseteq$ позначаються відношення включення множини, тобто A $\subseteq$ B («множина A включена в B»). Це означає, що кожний елемент множини A є також і елементом множини B. При цьому A називається підмножиною, а B – надмножиною.

A $\subseteq$ B – це включення у широкому змісті. Не виключено, що A = B. Якщо A включено у B, і при цьому A $\neq$ B (тобто існують елементи B, що не належать A), то A строго включається у B. У цьому випадку A буде власною підмножиною B, що записується A $\subset$ B. Інколи вживають вирази B $\supset$ A – «B містить у собі A».

2.2.2. Операції над множинами (поняттями)

Нехай A, B, C, … – підмножини деякої універсальної множини U.

B універсальнії множини U всіх можливих підмножин (включаючи $\varnothing$ – порожню множину та U – саму універсальну множину) визначємо чотири операції: 1) доповнення, 2) перетинання, 3) об'єднання, 4) різницю.

Доповненням множини A (позначається ~A або A**'**, читається «не-**A**») називається множина, яка складається з елементів U (універсальної множини), котрі не належать множині A.

Вираз має форму запису: $\overline{A} \overset{Df}{=} \{x \mid x \in U \ i \ x \notin A\}$ (не-A дорівнює множині всіх елементів **x** із U, які не належать множині **A**).

Графічний результат операції доповнення множини A

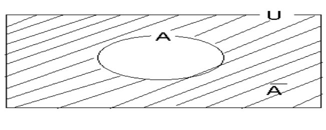


Рис.1

Будь-який елемент універсальної множини належить або A, або $\overline{A}$, але не може належати їм обом.

Доповненню множини відповідає операція над поняттями, яку називають запереченням поняття.

Перетинанням множин A та B (позначається A∩B, та A*B; читається «перетинання A і B») називається множина яка складається з елементів, що належать як множині **A**, так і множині B.

Вираз має форму запису: $A \cap B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A\ i\ x \in B\}$ (перетинання A і B дорівнює множині елементів **x**, де **x** є елементом як **A**, так і **B**). Інакше кажучи, $x \in A \cap B$ тоді і лише тоді, коли $x \in A$ та $x \in B$.

Наприклад, {1, 2, 3} ({1, 3, 4} = {1, 3}

Графічний результат операції перетинання множин **A** і **B**.

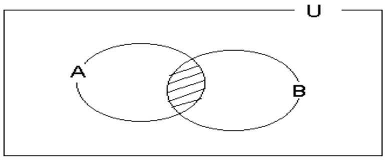


Рис.2

Відповідно визначається і результат перетинання будь-якого числа n множин $A_1, A_2, \ldots, A_п$ – як множина всіх елементів, що належать і A_1, і A_2, і …, A_n. Отримана множина позначається: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

Якщо множини A і B видалані з універсальної множини характеристичними предикатами, P_a і $P_в$, то перетинання $A \cap B$ – це множина, що складається з елементів, які володіють обома зазначеними властивостями.

Перетинання множин є операція усюди визначена, та перебувають в будь-яких ставленнях. Якщо є дві непустих множини (A і B), то існує п'ять взаємовиключних засобів, котрими можуть бути логічно пов'язані ці множини (рис. 3).

Такі відношення називають:

- лівобічне включення.
- правобічне включення.

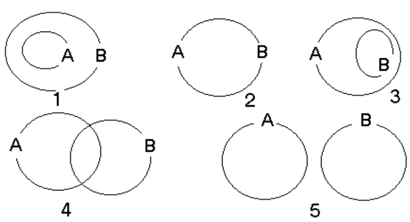


Рис.3

Операція перетинання множин має на меті знаходження загальних елементів двох або більшої кількості множин. Перетинанню відповідає операція над поняттями, яку називають множенням понять.

Знаходити загальні елементи множин доводиться для розв'язання задач у різноманітних областях науки і практичної діяльності. Наприклад, множина всіх квадратів є результатом перетинання множини всіх прямокутників із множиною всіх ромбів. Результатом перетинання множини натуральних чисел, що діляться на 2 та множини натуральних чисел, що діляться на 3, є множина натуральних чисел, яка діляться на 6.

Об'єднанням множин А і В (позначається А ∪ В, читається «об'єднання А з В») називається множина, яка складається з елементів, котрі належать хоча б одній з множин А або В.

Вираз має форму запису: $A \cup B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$.

(Об'єднання А з В дорівнює по визначенню множині елементів **x**, де **x** є елемент А або елемент В). Потрібно мати на увазі, що спілка «або» вживається у змісті «і/або». На рис. 4 заштрихована область, яка зображує результат об'єднання А і В.

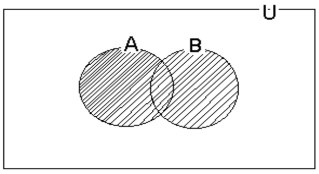


Рис. 4

Результатом об'єднання будь-яких n множин $A_1, A_2, \ldots, A_п$ зветься множина всіх елементів, котрі належать хоча б одній з них. Нова множина позначається $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_п$.

Об'єднанню множин відповідає операція над поняттями, яку називають додаванням понять. Операція об'єднання множин є усюди визначеною, так само, як і операція перетинання множин.

Множини, які об'єднуються мають спільні елементи, тобто їх перетинання не буде порожнім. Повторювані елементи в об'єднанні рахуються лише по одному разу, тому для кінцевих множин число елементів об'єднання може виявитися меншим, чим загальна сума елементів множин, які об'єднуються. По визначенню x ∈ A ∪ B, коли x є елементом хоча б однієї з множин А або В. Наприклад, {1, 2, 3} ∪ {1, 3, 4} = {1, 2, 3, 4}. На рис. 5 зображений результат об'єднання множин з повторюваними елементами.

Приклад додавання понять: якщо об'єднаємо множини усіх студентів **(**А**)** і молоді у віці від 17 до 22 років **(**В**)**, то кількість елементів $A \cup B$ буде подано сумою трьох чисел:

1) кількість студентів, які не досягли 17 років,
2) кількість студентів, котрим більш 22 років,
3) кількість молоді, що не є студентами.

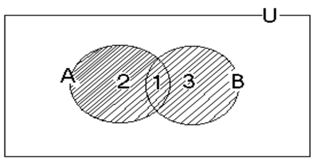


Рис.5

Різницею множини А и В (позначається $A \setminus B$ або $A \cap \overline{B}$**,** іноді **А – В**) називається множина, котра складається з елементів множини А, які не належать множині В. Вираз має форму запису: $A \cap \overline{B} \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$.

(Перетинання А з не-В дорівнює, по визначенню, множині елементів **x**, де **x** є елементом множини А та **x** не є елементом множини В).

Отже, $x \in A \cap \overline{B}$ тоді і лише тоді, коли $x \in A$ и $x \notin$.

Діаграма Эйлера-Венна (на рис. 6) подає графічне зображення результату цієї операції.

Множини А та В мають також іншу різність – $\overline{A} \cap B$, вона складається з елементів множини В, котрі не належать множині **А**.

Вираз має форму запису: $A \cap \overline{B} \overset{Df}{=} \{x \mid x \notin A \text{ і } x \in B\}$.

Таким чином, $x \in \overline{A} \cap B$ тоді і лише тоді, коли $x \notin A$ и $x \in B$.

Різниці двох множин бувають порожніми і непорожніми.

Доповнення множини А є окремий випадок різниці множин $\overline{A} = U \setminus A$.

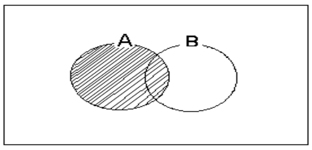


Рис.6

Над множинами, отриманими в результаті чотирьох визначених операцій, можна у свою чергу робити ті ж самі операції. Так, можна утворювати доповнення перетинання ($\overline{A \cap B}$), об'єднання ($\overline{A \cup B}$) або різниці ($\overline{A \cap \overline{B}}$); можна утворити перетинання об'єднань (A ∪ B) ∩ (C ∪ D) або об'єднання перетинань (A ∩ B) ∪ (C ∩ D) і т.д.

Для вказівки порядку операцій застосовуються скобки. Відношення між скобками, знаками ∩ і ∪ таке ж, як між скобками, зі знаками * і + в елементарній алгебрі. Доповнення береться від усього виразу, над якими стоїть штрих (або від усього виразу, що стоїть в дужках, поруч із якими стоїть штрих).

Потрібно пам'ятати, що всі наведені операції можна робити лише над множинами, що належать до однієї універсальної множини.

2.2.3. Алгебра множин (числення понять)

Операції над множинами підпорядковані законам елементарної алгебри. Підпорядкованість більш очевидна, якщо знаки перетинання й об'єднання множин замінити на знаки множення і додавання. Цим визначається назва вивчаємого підрозділу «Алгебра множин». Алгебру множин називають також булевою алгеброю, що пов'язано з ім'ям англійського математика і логіка Дж. Буля, який поклав в основу своїх логічних досліджень ідею аналогії між алгеброю і логікою.

Закони операцій над множинами (понятями)

1. Закон тотожністі A = A.
2. Закон протиріччя $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
3. Закон виключного третього $A \cup \overline{A} = U$.

Перші три закони є виразом, на мові булевої алгебри множин, основних законів мислення.

4. Закон ідемпотичності (лати. Idem – те ж, potentia – сила):
I. для перетинання $A \cap A = A$;
II. для об'єднання $A \cup A = A$.
5. Комутативний закон
I. для перетинання $A \cap B = B \cap A$;
II. для об'єднання $A \cup B = B \cup A$.
6. Асоціативний закон
I. для перетинання $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$;
II. для об'єднання $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.
7. Дистрибутивний закон
I. для перетинання з об'єднанням $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
II. для об'єднання з перетинанням $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Закон поглинання
I. для перетинання з об'єднанням $A \cap (A \cup B) = A$;
II. для об'єднання з перетинанням $A \cup (A \cap B) = A$.

Якщо довільна непорожня множина А перетинається й об'єднується з універсальною і порожньою множинами, то одержимо такі чотири правила:

I. $A \cap U = A$;
II. $A \cup U = U$;
III. $A \cap \varnothing = \varnothing$;
IV. $A \cup \varnothing = A$.
9. Закон де Моргана
I. для доповнення перетинання $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
II. для доповнення об'єднання $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
10. Закон подвійного доповнення (заперечення) $\overline{\overline{A}} = A$.
11. Доповненням універсальної множини є порожня множина, а доповнення порожньої множини є універсальна множина, тобто:
I. $\overline{U} = \varnothing$;
II. $\overline{\varnothing} = U$.

Закони алгебри множин по відношенню до операцій перетинання й об'єднання підпорядковані принципу двоїстості: якщо в будь-якій вірній тотожності алгебри множин усі знаки перетинання замінити знаками об'єднання, а всі знаки об'єднання – знаками перетинання, знак універсальної множини замінити знаком порожньої множини, а знак порожньої множини – знаком універсальної множини, то одержимо знову вірну тотожність. У силу цього принципу, наприклад, з A $\cap \overline{A}$ = $\varnothing$ випливає, що A $\cup \overline{A}$ = U і т.п.

Якщо в булевій алгебрі множин знаки перетинання й об'єднання замінити на знаки множення і додавання, то при такій заміні всі приведені вище закони перейдуть у відомі закони елементарної алгебри.

Закони тотожності, комунікативний і асоціативний мають місце в елементарній алгебрі. У ній буде справедливим також перший дистрибутивний закон, проте другий – не має сенсу. Виявляться зрадливими закони ідемпотичності (вони показують відсутність у булевій алгебрі ступенів і коефіцієнтів), поглинання і подвійного доповнення, а принцип двоїстості в звичайній алгебрі просто не визначений.

Перевірка істинності тотожностей за допомогою діаграми Ейлера-Венна

Два кола (у загальному положенні, тобто пересічні) поділяють всю універсальну множину на чотири області (рис. 7):

I. $A \cap B$;
II. $A \cap \overline{B}$;
III. $\overline{A} \cap B$;
IV. $\overline{A} \cap \overline{B}$.

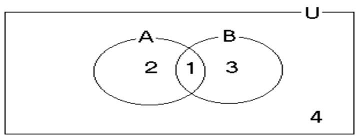


Рис.7

Не важко зауважити, що множина $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ збігається з множиною A $\cap$ B. Звідси слідує тотожність:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B.$$

З рис. 1 видно, що $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, тому що множина, записана ліворуч, від знака рівності, і множина, записана праворуч, зображуються однією і тією ж областю.

Три кола (у загальному положенні, тобто взаємно пересічні) оділяють універсальну множину на вісім частин (рис. 8):

I. $A \cap B \cap C$;
II. $A \cap B \cap \overline{C}$;
III. $A \cap \overline{B} \cap C$;
IV. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

V. $\overline{A} \cap B \cap C$;

VI. $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$;

VII. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$;

VIII. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

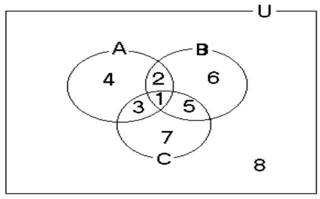


Рис.8

Рисунок надає можливість сформулювати:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

Так само й

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = A.$$

Для того, щоб довести тотожність множин за допомогою діаграми Эйлера-Венна, необхідно:

I. Накреслити відповідну діаграму, і заштрихувати усі множини, що стоять у лівій частині рівності;

II. Накреслити другу діаграму і зробити теж для правої частини рівності;

III. Якщо на обох діаграмах буде заштрихована та сама область, то дана тотожність – істинна.

2.2.4. Булеві операції над множинами (поняттями)

Сукупність усіх підмножин множини **X**, включаючи порожню множину, зветься булеаном X і позначається $\mathbf{2^x}$. Елементи булеана $\mathbf{2^x}$ (X_1, X_2, …, X_1) утворюють його розбивку, якщо $X_i \neq \varnothing$, i = 1, 2, …, r, і

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_г; \qquad X_i \cap X_j = \varnothing, \qquad i \neq j. \qquad (1)$$

Множини X_1, X_2, …, $X_г$ – блоки розбивки булеана.

Сукупність всіх упорядкованих пар (x, y) при $x \in X$, $y \in У$, називається декартовым множенням множин X та У і позначається X*У, тобто $$X*У = \{(x, y) : x \in X, y \in У\}.$$

Аналогічно визначається декартове множення r множин

$$X_1*X_2*\ldots*X_г = \{(x_1, x_2, \ldots, x_г) : x_1 \in x_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_г \in X_г\},$$

При збігу множин визначається їх декартова ступінь $X^{(г)} = X*X*\ldots*X$.

Нехай X – кінцева множина та |X| – число її елементів. Сформулюємо аксіоматичне правило, яке лежить в основі багатьох комбінаторних обчислень і оцінок.

I Правило суми. Якщо X – кінцева множина, то

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_r,\ X_i \in 2^x,$$

i = 1, 2, …, r, то $|X| \le |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_r|,$ (2)

При цьому рівність досягається, коли $X_1, X_2, \ldots, X_r$ утворять розбивку X.

II Правило утворення блоків розбивки для кінцевих множин $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ $|X_1{*}X_2{*}\ldots{*}X_r| = |X_1| * |X_2| * \ldots * |X_r|.$ (3)

Бінарні відповідності і бінарні відношення

Пара $R \subseteq X{*}У$ є бінарною відповідністю на множинах X та У.

Якщо $(x, y) \in R$, то x і y є проекціями на кардинатні осі X та У. Відповідною буде форма запису: I $x = \pi_1(x, y)$,

II $y = \pi_2(x, y)$.

Для бінарної відповідності $R \subseteq X{*}У$ визначимо проекції на X та У:

$$\pi_1 (R) = \{x : x = \pi_1(x, y), \quad (x, y) \in R\},$$

$$\pi_2 (R) = \{y : y = \pi_2(x, y), \quad (x, y) \in R\}.$$

Проекції $\pi_1(R)$ і $\pi_2(R)$ називають областю визначення R.

Образом елемента $x \in X$ при відповідності R є множина

$$\delta_1(x; R) = \{y : y \in У, \quad (x, y) \in R\}.$$

Аналогічно прообразом елемента $y \in У$ при відповідності R є множина $\delta_2(y; R) = \{x : x \in X, \quad (x, y) \in R\}$.

Бінарна відповідність $\varphi \subseteq X{*}У$ називається функціональною, якщо образ кожного елемента $x \in X$ містить рівно один елемент.

Для множин $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $У = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ бінарній відповідності $R \subseteq X{*}У$ можна зіставити матрицю:

$$A = \|a_{ij}\|,\ i = 1,2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m, \qquad \text{таку, що} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in R, \\ 0, & (x_i, y_j) \notin R. \end{cases}$$

Матриці, елементи яких приймають значення 0 та 1, называють 0, 1-матрицями.

0, 1-матрицю A, яка відповідає подвійності R, називають матрицею інцедентності.

При X = У бінарна відповідність $R \subseteq X{*}X$ буде називатися бінарним відношенням на множині X. Прикладом бінарного відношення на множині X є відношення рівності $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$, яке назване діагоналлю множини X.

Бінарному відношенню R на кінцевій множині X ставиться у відповідність геометричний об'єкт, названий орієнтованим графом.

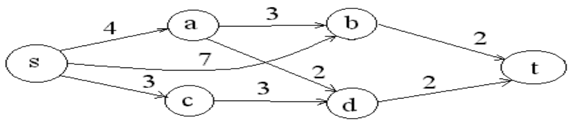


Рис.9

Кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність точка на площині, яка зветься вершиною. Якщо $(x, x') \in R$, то об'єкт між двома точками **x** та **x'** звуть дугою. Діаграма (X, R) є сукупністю вершин і дуг, відношення R.

Для бінарного відношення R на множині X, якщо $(x, x') \in R$, записуємо: xRx'. Використовуючи введене позначення, сформулюємо ряд властивостей, якими володіють бінарні відношення:

I. Рефлективність xRx для усіх $x \in X$;
II. Антирефлективність $R \cap \Delta_X = \varnothing$;
III. Симетричність із xRx' випливає x'Rx;
IV. Антисиметричність із xRx' і x'Rx слідує x = x';
V. Транзитивність із xRx', x'Rx'' слідує xRx'';
VI. Дихотомія або xRx', або x'Rx, x, $x' \in X$.

Бінарне відношення R на множині X зветься відношенням еквівалентності, якщо воно одночасно рефлексивно, симетрично і транзитивно.

Якщо R – відношення еквівалентності і xRx', то пишуть $x \sim x'$. Множина елементів $K(x) = \{x': x' \sim x\}$ є класом еквівалентності, який містить **x, x ∈ X**. Класси еквівалентності утворюють розбивку множини **X.** Сформулюємо й обернене висловлення: будь-якій розбивці **X** відповідає відношення еквівалентності, класи якого збігаються з правим та лівим кордонами зазначеної розбивки. Множина всіх класів еквівалентності називається фактормножиною даного відношення еквівалентності.

Бінарне відношення R на множині X є відношенням часткового порядку, якщо воно рефлексивно, антисиметрично і транзитивно.

Множина X є частково упорядкованою множиною. Якщо R – відношення часткового порядку і xRx’, то пишуть: $x \preccurlyeq x'$.

Відношення часткового порядку R, яке задовольняє умові дихотомії, зветься відношенням лінійного порядку або відношенням порядку. Запис $x \preccurlyeq x''$ використовується для позначення того, що x і x’ пов’язані відношенням R лінійного порядку: xRx’.

На множині X можна визначити відношення суворого часткового (лінійного) порядку $\prec$ (<) вважаючи $x \prec x'$ ($x < x'$), якщо $x \preccurlyeq x'$($x \leq x'$) і $x \neq x'$.

На кінцевій множині X завжди можна задати відношення суворого порядку, які визначають перестановку елементів множини. Число відношень дорівнює |X|!

На булеані 2^x можна задати відношення часткового порядку, вважаючи $X \preccurlyeq X'$ тоді і лише тоді, коли $X \subseteq X'$ для всіх X, $X' \in 2^x$.

На декартовій ступені $X^{(г)}$ кінцевої множини X з заданим суворим лінійним порядкам установлюються відношення лінійного порядку, якщо:
$(x_1, x_2, \ldots, x_г) < (x_1', x_2', \ldots, x_г')$ для $(x_1, x_2, \ldots, x_г)$, $(x_1', x_2', \ldots, x_г') \in X^{(г)}$.

Для найменшого індексу I з властивістю $xi \neq xi'$, має місце висловлення порядку $xi < xi'$. Названий порядок іменують дискриптивним, або лексикографічним, тому що він використовується для упорядкування слів у словниках.

2.2.5 Попередні відомості про упорядкування множин (понять)

Символи N, Z, Q, R, C використовуються для позначення різноманітних числових систем; припустимо, що

$$N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\},\ N_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Позначення, застосовувані при упорядкуванні в теорії множин

- Потужність множини ($2^м$) (кардинальне число) множини M. Позначається через |M|; якщо M нескінченна упорядкована множина, то $|M| = \infty$.
- Для будь-якої множини M символ $M^к$ позначає декартове множення:

$$M^к = \{(a_1, \ldots, a_к): a_i \in M\}.$$

- $M^{(к)}$ – сімейство k-підмножин множини M: $M^{(к)} = \{A \subseteq M: |A| = k\}$.
- Кінцева потужність множини n називається n-множиною: $|M| = n$.
- Символ Кронекера – δ_{ij} позначає тотожне відображення множини M на себе через $id_м$, множину усіх своїх підмножин.
- Символи (**: =**) або (**: ⇔**) вживаються в тих випадках, коли визначаються уявлення про конкретну множину.

Основні правила теорії перерахувань

I. Правило рівності**.** Якщо N і R – кінцеві множини й існує взаємооднозначне відображення між ними, то $|N| = |R|$.

II. Правило суми**.** Якщо $\{A_i: i \in I\}$ – кінцеве сімейство кінцевих попарно не пересічних множин, то $|\cup_{i \in I} A_i| = \sum_{i \in I}|A_i|$.

III. Правило множення**.** Якщо $\{A_i : i \in I\}$ – кінцева множина кінцевих множин, то для декартова множення $\prod_{i \in I} A_i$ має місце тотожність

$$|\prod_{i \in I} A_i| = \prod_{i \in I}|A_i|.$$

Для опису множин, що входять в об'єднання, але не пересікаються, використовуються символи $A \cup B$ або $\cup_{i \in I} A_i$.

Мультимножина (на множині S) – це множина S разом із функцією

$r: S \to N_0$ яка задає кратність елементів множини S.

Вираз має форму запису: мультимножина k відображена на S

$$k = \{a^{k_a} : a \in S\},\ где\ k_a := r(a),\ a \in S.$$

Звичайні поняття, визначені для множин, переносяться і на мультимножини. Наприклад, якщо

$k = \{a^{k_a} : a \in S\}$ та $L = \{a^{l_a} : a \in S\}$ то

$k \subseteq L: \Leftrightarrow k_a \le L_a$ для всіх $a \in S$;

$k \cap L := \{a^{\min(k_a, l_a)} : a \in S\}$,

$k \cup L := \{a^{\max(k_a, l_a)} : a \in S\}$.

Сімейство мультимножин на множині S утворює структуру, яка зветься штахетом щодо операції вкладення множини в мультимножину; цей штахет – завжди повний. Будь-який штахет представляється у вигляді графа.

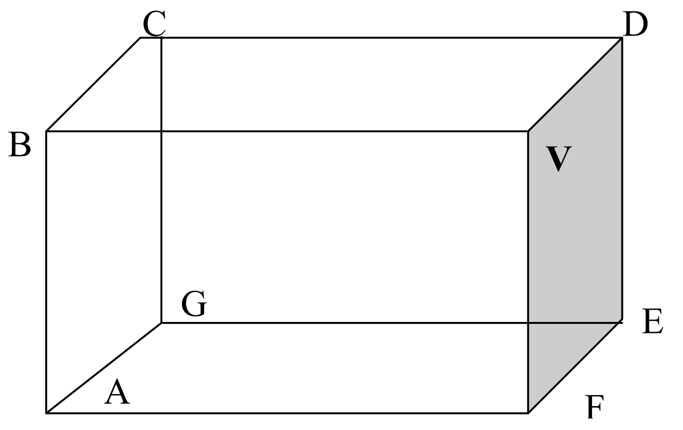


Рис.10

На рис. 10 зображений штахет у вигляді графа, у якого, множина вершин {A, B, C, D, E, F, V, G}. Граф неорієнтований, оскільки кожне з його ребер {AB, BC, CD, DE, EF, FA, FV, VD, VB, AG, GE, GC} не має векторної спрямованості. Ребра графа утворять мультимножину всіх його ребер.

Початкові відомості про графи і їх застосування в теорії множин

Неориентований граф G(V, E) складається з непорожньої **V,** множиною вершин, і мультимножини E неупорядкованих пар {a, b} ребер.

Простий граф – це граф, який не містить петель {a, a} і паралельних ребер {a, b}, {a, b}, тобто граф, у якого $E \subseteq V^{(2)}$ – звичайна множина.

Орієнтований граф (орграф), $\vec{G}(V, E)$ – це непорожня множина V вершин і мультимножина E орієнтованих пар (a, b) із V. Елементи E називають стрілками*,* або орієнтованими ребрами, або дугами.

Орієнтація на неорієнтованому графі G(V, E) – це напрямок, який приписують кожному ребру k = {a, b}. В разі напрямку (a, b); пишемо a=k, $b = k^+$. Граф кінцевий, якщо V, та E кінцеві.

Два графи G(V, E) і G’(V’, E’) ізоморфні, якщо існує взаємне відображення φ: V → V’, таке, що ребра {a, b} ∈ E та {φ(a), φ(b)}∈ E**’** входять в E і E’ з однаковою кратністю. Ступінь γ (ν) вершини ν = це число ребер, инцидентних ν (петлі {ν, ν} рахуємо двічі). Отже, для кінцевого графа G(V, E) завжди справедливо $\sum_{\nu \in V} \gamma(\nu) = 2|E|$.

Двома важливими типами графів є повні графи $К_n$ та повні двочасткові графи $К_{m, n}$

$К_n$ – простий граф із n вершинами, кожна пара яких сполучена ребрами.

$К_{m, n}$ – простий граф, множина вершин якого є об'єднанням двох пересічних множин потужності m і n відповідно, при цьому дві вершини сполучені ребрами лише тоді, коли вони належать різним множинам.

Двочастковий граф – це підграф повного двочасткового графа, який позначається через $G(V_1 \cup V_2, E)$, щоб відзначити множини вершин $\mathbf{V_1}$**,** $\mathbf{V_2}$**,** у яких кожне ребро з'єднує вершину $\mathbf{V_1}$ з вершиною $\mathbf{V_2}$.

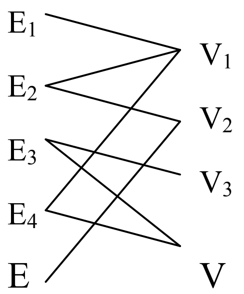
Останнє правило – найбільш корисний засіб
у теорії перерахувань

IV. Правило підрахунку підмножин і простих елементів мультимножини.

Нехай $G\ (V_1 \cup V_2, E)$ – кінцевий дводольний граф із визначальними множинами вершин V_1 V_2, тоді $\sum_{\nu \in V_1} \gamma(\nu) = \sum_{\nu \in V_2} \gamma(\nu) \qquad (=|E|)$.

Дводольний граф $G(V_1 \cup V_2, E)$ слід також розглядати як орієнтований граф, усі ребра якого спрямовані з V_1 у V_2. Інакше кажучи, дводольниі графи з визначальними множинами вершин V_1 і V_2 ототожнюються з бінарними відношеннями між V_1 і V_2. Для позначення множини ребер використовується буква R**,** а в графі $G\ (V_1 \cup V_2, R)$ читаємо $R(E){:} = \cup_{V \in E}\{ V_1 \in E{:}(x, y) \in R\}$ для $E \subseteq V_1$ та, аналогічно, $R(V){:} = \cup_{E \in V}\{E \in V_1{:}\ (x, y) \in R\}$ для $E \subseteq V_1$. Для одноэлементної множини {E} пишемо R(E).

Схема двудольного графу G(V E)



Система множин

E = {1, 2, 3, 4,}
V = {{1, 2, 3}, {2,}, {3}}.

Системою множин (V, E) називається множина **V** разом із сімейством підмножин множини E (які не обов'язково перетинаються) Будь-яка система множин (V, E) задає двочастковий граф у якому $(p, V) \in R :\Leftrightarrow p \in V$. Обернено, любой двочастковий граф $V(V \cup E, R)$ породжує систему множин (V, E), якщо $V \in E$ з множиною $R(V) \subseteq E$.

2.2.6. Ізоморфізм множин (понять)

Поняття лінійного простору складається з двох різноманітних частин:

I. Лінійний простір є сукупністю векторів.

II. На лінійному просторі діють операції додавання та множення на число.

При аналізі лінійного простору, або множин, визначають як природу і властивості векторів, так і властивості арифметичних операцій, незалежно від природи елементів, над якими вони відбуваються.

Дві множини, влаштовані однаково стосовно операцій додавання і множення на число, володіють однаковими властивостями, які називають ізоморфними.

Поняття ізоморфізму формулюється таким чином:

Два лінійних простори над одним і тим самим тілом коефіцієнтів, або дві множини, називаються ізоморфними, якщо між їх елементами можливо встановити таку взаємно однозначну відповідність, при якій сумі векторів першого простору буде відповідати сума відповідних векторів другого простору, а добутку якогось числа на вектор першого простору буде відповідати добуток того ж числа на відповідний вектор другого простору.

Взаємно однозначна відповідність, яка володіє зазначеними властивостями, називається ізоморфізмом.

Властивості ізоморфізмів

- При ізоморфній відповідності нульовий вектор першого простору обов'язково переходить у нульовий вектор другого простору.

- При ізоморфному відображенні лінійного простору ς на линійний простір ς_1 вектор а лінійного простору ς переходить у a_1 відповідного лінійного простору ς_1.

- Відповідно до визначення ізоморфізму добуток $0*a$ переходить у добуток $0*a_1$, тобто нульовий вектор першого простору переходить в нульовий вектор другого.

При ізоморфному відображенні система відображень векторів першого простору переходить у систему відображень векторів другого простору.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ – утворюючі вектори першого простору та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ – відповідні їм вектори другого простору. Візьмёмо у другому просторі довільний вектор b та розглянемо вектор a, що відповідає йому, у першому просторі. Вираз, який описує вектор a, уявимо у формі:

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s.$$

По визначенню ізоморфного відображення сума $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s$ перейде в суму $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_s b_s$, отже, вектор b співпаде з сумою $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_s b_s$. З цього виходить, що вектори $b_1, \ldots, b_s$ складають систему утворюючих другого простору.

При ізоморфізмі линійно незалежні вектори першого простору переходять у линійно незалежні вектори другого простору.

Нехай, линійно незалежні вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ першого простору переходять у вектори $b_1, b_2, \ldots, b_m$ другого простору. Між векторами двох просторів існує співвідношення: $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m = 0_1$.

Відповідно до визначення ізоморфізму, лівій частині наведеної рівності відповідає в першому просторі вектор $\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_m a_m$. Нульовому вектору 0_1 відповідає в першому просторі нульовий вектор 0. Отже, $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m = 0$.

Відповідно тому, що вектори $a_1, \ldots, a_m$ линійно незалежні $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$, вектори $b_1, \ldots, b_m$ також линійно незалежні.

З двох останніх властивостей безпосередньо витікає:

База першого лінійного простору, при ізоморфізмі, переходить в базу другого лінійного простору. Таким чином, ізоморфні лінійні простори, а також ізоморфні множини, мають однакову розмірність.

Зворотне так само справедливо:

Якщо два лінійних простори над одним тілом коефіцієнтів мають однакову розмірність, то вони ізоморфні.

Для доказу виберемо в кожному з заданих просторів певну базу, наприклад $a_1, a_2, \dots, a_n$ та $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Вектори $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$, та $b = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n$ будуть називатися відповідними, якщо $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

Тому що кожний вектор линийного простору може бути виражений через базу лише одним засобом, відповідність стає взаємооднозначною.

Нехай $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$, та $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$ два відповідних вектори. Тоді $\alpha a = \alpha\alpha_1 a_1 + \alpha\alpha_2 a_2 + \dots + \alpha\alpha_n a_n$,

$$\alpha b = \alpha\alpha_1 b_1 + \alpha\alpha_2 b_2 + \dots + \alpha\alpha_n b_n.$$

Виходячи з того, що відповідні коефіцієнти в вищезазначених розкладаннях рівні, αa та αb будуть відповідними векторами, тобто добуток числа на вектор першого простору переходить у добуток того ж числа на відповідний вектор другого простору.

Аналогічно доводиться і та властивість, що сума векторів одного простору переходить у суму відповідних векторів другого простору. Тому побудована відповідність являються ізоморфізмом, що і було потрібно довести.

Перераховані вище властивості ізоморфних відповідностей показують, що при заданому основному тілі К кожний лінійний простір визначається своєю розмірністю з точністю щодо ізоморфізму. Простір рядків довжини n, з елементами тіла К, при n = 1, 2, …, з точністю до ізоморфізму вичерпує взагалі всі простори кінцевої розмірності над К. Зокрема, звичайний простір спрямованих відрізків, изоморфний просторові рядків, певнї довжини $\mathfrak{I}$ над полем речовинних чисел. Простір функцій, визначених на множині $\mathfrak{I}$, що містить s елементів, із значеннями в тілі К изоморфний простору рядків довжини s з елементами з К і т. д.

Унітарним модулем над кільцем К з одиницею називається алгебра, сигнатура якої складається з бінарної операції та символу, F_α ($\alpha \in K$) одномісних операцій, за умови, що в цій алгебрі виконуються тотожності:

$$M_1: x + y = y + x;$$

M_2: x + (y +z) = (x +y) + z;
M_3: x + (y + (–y)) = x;
M_4: $F_\alpha(F_\beta(a)) = F_{\alpha\beta}(a)$;
M_5: $F_\alpha (a + b) = F_\alpha(a) + F_\alpha(b)$;
M_6: $F_{\alpha+\beta}(a) = F_\alpha(a) + F_\beta(a)$;
M_7: $F_1(a) = a$.

Основне кільце К нескінченне. В якості окремих основних операцій, множення елементів основної множини (векторів), на любий фіксований елемент застосовуються вираз α ∈ K. При такому визначенні, сигнатура модуля так само нескінчена. Змінюючи кільце К, змінюємо і сигнатуру класу модулів.

2.2.7. Упорядкування в системі множин (понять)

Якщо P – упорядкована множина, то P* – подвійна упорядкована множина, отримана обертанням відношення порядку у множині P. Якщо P містить єдиний мінімальний елемент, то він називається найменшим, або 0-елементом, та позначається 0. Аналогічно, єдиний максимальний елемент називається найбільшим, або 1-елементом, та позначається 1. Множина b покриває множину a, якщо a < b, або множина a покрите множину b, якщо b < a. З співвідношення a < x ≤ b випливає x= b.

- Атоми – це елементи, які покривають 0 (якщо 0 існує).
- Коатоми – елементи, що покриваються одиницею.

Упорядкована множина P подається за допомогою її діаграми, орієнтованого графа P, у якому з вершини a до вершини b проведене орієнтоване ребро. Це можливо лише тоді, коли b покриває a. Діаграма будується знизу нагору і без стрілк.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(0, 1)-матриця.}$$

Приклад

I Ланцюг – це упорядкована множина, у котрій будь-які два елементи порівнянні. Для ланцюга $\{a_1 < a_2 < \dots < a_п\}$ використовується скорочене позначення $\{a_1, \dots, a_п\}$.

II Довжина ланцюга на одиницю меньше потужності множини яка названа ланцюгом.

III Висота L(a) – це елемент $a \in P$ – де довжина самого довгого ланцюга складається з елементів множини P, та закінчується елементом a.

IV Антиланцюг – це множина у якій ніякі два елементи не порюються.

Ланцюг в упорядкованій множині P не роздріблений, якщо будь-який його елемент покривається наступним елементом. Нехай L – штахет, в такому разі порожня підмножина M зветься підштахетом, якщо виконується умова $x, y \in M$, яка тягне за собою визначені співвідношення:

$$x \wedge y \in M \text{ та } x \vee y \in M.$$

Подмножина $M \subseteq L$ може бути штахетом щодо своїх власних законів, які індуцировані відношенням порядку. Інтервал в упорядкованій множині P – це будь-яка множина $[a, b]: = \{x \in P: a \leq x \leq b\}$, $a, b \in P$.

Добуток $\prod_{i \in I} P_i$ упорядкованих множин Pi – це упорядкована множина з координатним відношенням порядку. Добуток штахетів знову є штахет.

Сума $\sum_{i \in I} L_i$ штахетів, кожен з який містить 0-элмент, – це підштахет у добутку $\prod_{i \in I} L_i$, який складається з векторів, у котрих лише кінцеве число координат відрізняється від 0. Якщо не обговорений зворотній вираз, то вважається, що множини N_0, N_i, N_n, наділені природним відношенням порядку.

Повний штахет – це такий штахет, у якому будь-яка непорожня підмножина має найменший і найбільший елементи. Якщо W – слово, яке складається лише з штахету L та символів $\wedge$, $\vee$, $\leq$ і (,), то подвійний вираз W* утворюється за допомогою заміни символів $\wedge$ на $\vee$ та $\leq$ на $\geq$.

Упорядкованість у множині (слові) W для всіх значень його перемінних x_i тягне за собою упорядкованість в подвійно упорядкованій множині (слові) W* для всіх значень перемінних x_i. Таке твердження зветься принципоп бінарності для штахетів. Слово W називається самоподвійним, якщо W* = W.

Різноманітні необхідні позначення при упорядкуванні множин

- Нехай a ∈ R. Символом [a] позначається найменьше ціле число множини R, якщо [a] ≤ a. Відповідно позначається найбвльше ціле число множин R, якщо[a] ≥ a.
- Іноді використовується символом **#{…},** для позначення потужність порожньої множини {…}.
- Розбивкою множини S називається об'єднання, яке не перетинається з самою множиною S = $\bigcup_{i \in I} A_i$.
- Щоб зазначити розбивку множини також використовується позначення S = $A_1|A_2|$.
- Множина A_i вважається непорожньою, якщо не обґрунтоване зворотнє твердження.

Щоб спростити запис операції підсумовування, іноді відзнається індекс, по якому ведется підсумовування, зіркою. Наприклад, нехай M = $[m_{ij}]$ – матриця розміру n*n. Тоді $\sum_{1 \le i^* < j \le n} m_{ij} = m_{1j} + m_{2j} + \ldots + m_{j-1, j}$.

Класи відображень

Дано дві множини позначені N та R та відображення f: N → R, яке задовольняє визначеним умовам. Трійка (N, R, f) називається морфізмом. Нове відображення, що утворилося замість N та R розбивається на класи з наступним перерахуванням і упорядкуванням в них. Завжди насамперед потрібно описати умови комбінаторного характеру, які накладаються на поперeжнє відображення.

Нехай (N, R, f) – морфізм. У більшості випадків N і R кінцеві множини. Для позначення їх потужності використовуються символи n = |N| та r = |R|, f описується за допомогою виразу f = $\begin{pmatrix} \ldots\ a\ \ldots \\ \\ \\ \ldots\ f(a) \ldots \end{pmatrix}$, (a ∈ N).

У цьому випадку f: N → R. – зветься стандартним уявленням відображення Частіше за все область N буде природньо упорядкованою.

Наприклад, три вирази $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & a & b & b\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 2\\ a & b & b & a\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 2\\ b & b & a & a\end{pmatrix}$, подають одне і теж відображення.

Символьні позначення відображень

Відображенню f: N → R співставимо образ im(f) і ядро ker(f);

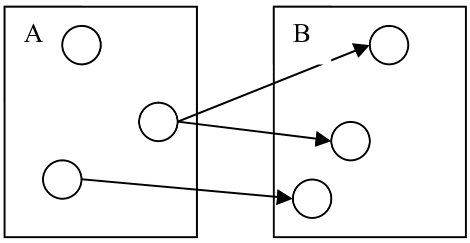
$$\mathrm{im}(f) := \bigcup_{a \in N} f(a), \qquad \ker(f) := \bigcup_{b \in im(f)} f^{-1}(b).$$

Ядро відображення f – це розбивка множини N, яка індуцирована відношенням еквівалентності a ≈ a: ⇔ f(a) = f(a’) (a, a’ ∈ N).

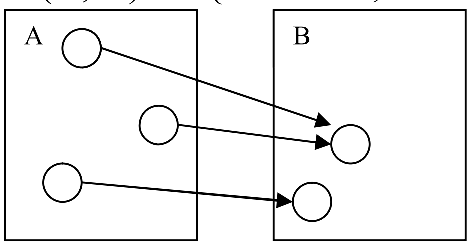
Зручно ввести порожнє відображення $f_\varnothing$ з образом $\mathrm{im}(f_\varnothing) = \varnothing$ із невизначеним ядром. Відображення f: N → R зветься сюр’єктивним, якщо im(f) = R, та ін’єктивним, якщо ker(f) = 0 (0 – мінімальний елемент у штахеті розбивок множини N), тобто якщо a ≠ a’ ⇒ f(a’) ≠ f(a’) для всіх a, a’ ∈ N. Відображення котрі одночасно сюр’єктивні та ін’єктивні, звуться бієктивными.

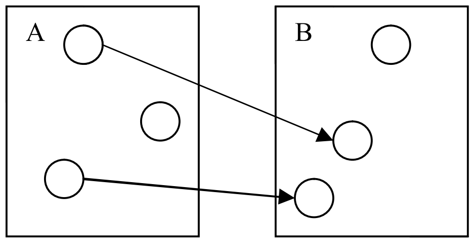
Діаграми відображень

I Map (N, R) : = {f: N → R, f довільне}



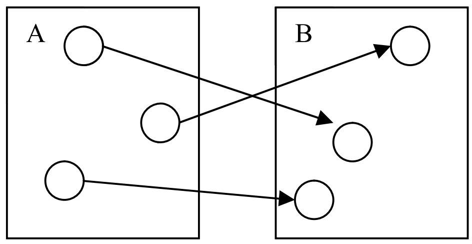
II Sur (N, R) : = {f: N → R, f сюр’єктивне}





III Inj (N, R) : = {f: N → R, f ін'єктивне}

IV Bij (N, R) : = {f: N → R, f бієктивне}



Якщо множини N і R кінцеві, то одержуємо такі співвідношення між їх потужностями:

Sur (N, R) $\neq \varnothing \Rightarrow |N| \geq |R|$,

Ing (N, R) $\neq \varnothing \Rightarrow |N| \leq |R|$,

Bij (N, R) $\neq \varnothing \Rightarrow |N| = |R|$.

При відображенні f: N → N кінцевої множини N на себе поняття сюр'єктивності, ін'єктивності та бі'єктивності збігаються. Для безкінечної множини це не вірно. Наприклад, f: N → R, f(k) = 2k ін'єктивно, але не сюр'єктивно.

Припустимо, що множини N та R частково упорядковані (рис. 11)

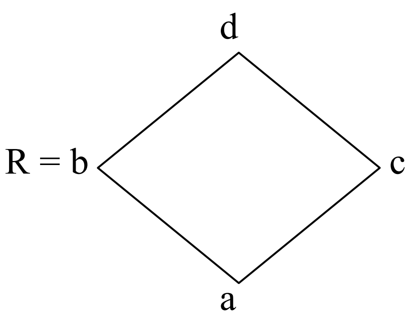


Рис.11

Відображення $f \in$ Map (N, R) називається монотонним, якщо воно зберігає відношення порядку, тобто якщо $a \le_N b \Rightarrow f(a) \le_R f(b)$ для всіх $a, b \in N$, та називається антимонотонним, якщо $a \le_N b \Rightarrow f(a) \ge_R f(b)$ для всіх $a, b \in N$. Сімейство монотонних відображень утворить інший важливий клас:

$$\mathrm{Mon}\ (N, R) := \{f\colon N \to R,\quad f\quad \text{монотонно}\}.$$

Якщо множина N – неупорядкована, то незалежно від відношення порядку на R маємо просто Mon (N, R) = Map (N, R). Будь-яке монотонне або антимонотонне відображення переводить ланцюг в подібний йому ланцюй. Приклад**.** Нехай N = {1 < 2 < 3 < 4} та відображення $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, монотонне, тоді відображення $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & b & c & a \end{pmatrix}$, антиномне.

Алгебраїчний аналіз призводить до відомого класу відображень:

Припустимо, що N і R визначені структури одного типу, наприклад групи, кільця або векторні простори з однією і тією же областю скалярів. Відображення $f\colon N \to R$, яке зберігає всі операції називається гомоморфізмом. Визначемо клас усіх гоморфізмів із N у R через

$$\mathrm{Hom}\ (N, R) := \{f\colon N \to R,\ f\ \text{гоморфізм}\}.$$

За допомогою перетинання алгебраїчних структур утворюються класи сюр'єктивних монотонних відображеннь або ін'єктивні гоморфізми.

Дискриптивні уявлення відображень

У морфізма (N, R, f) є дві корисні інтепретації:

I Нехай множина N упорядкована за допомогою фіксованого відношення повного порядку. Елементи множини N представимо як номера букв у слові. У цьому випадку на місці з номером $i \in N$ стоїть буква $L \in R$, за умовою, що $f(i)=L$. У цьому випадку, відображення f можна розглядати як слово довжини n, що складене з букв алфавіту R, з індексами з N.

$$f : N \to R = \begin{cases} \text{відображнння із N в R;} \\ \text{сліво з букв алфавіту R,} \\ \text{відмічених індексами із N;} \\ \text{заповнення R предметами із N.} \end{cases}$$

II Упорядкуємо за допомогою відношення повного порядку всі елементи множини R і розглянемо їх як блоки розбивки множини. Якщо f(a) = b, то предмет $a \in N$ втілений у блок b, та блок b містить предмет a.

Таким чином, інтепретуємо морфізм f: N → R як засіб заповнення блоків множини R предметами з множини N. У результаті одержуємо:

Якщо ланцюг N = {a_1, a_2, …, $a_п$} то відображенн f = $\begin{pmatrix} a_1 \ldots a_n \\ f(a_1) \ldots f(a_n) \end{pmatrix}$ можна однозначно зіставити слово $f(a_1)\, f(a_2) \ldots f(a_n)$.

Назвемо таке слово уявленням відображення f (щодо заданого повного порядку на N). Аналогічно, якщо R = {b_1, …, b_r} – ланцюг, то$f^{-1}(b_1) \cup f^{-1}(b_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(b_r)$ називається блоком-уявленням відображення f. У більшості випадків N або R будуть множинами {1, …, n} або {1, …, r}, у яких є природнє відношення порядку.

Приклад. Нехай N = {1 < 2 < 3}, R = {a < b < c}. Перерахуємо множину Map (N, R), задавши словесні уявлення його членів:

aaa	acc	aba	caa	cbc	acb
aab	ccc	baa	cac	ccb	bac
abb	bbc	bab	cca		cab
bbb	bcc	bba	bcb		bca
aac	abc	aca	cbb		cba

У перших двох колонках – монотонні відображення; відображення в останній колонці і відображення abc – бієктивне. Отже:

|Map (N, R)| = 27, |Bij (N, R)| = 6, |Mon (N, R)| = 10.

Визначення відображень можна тепер перенести у слова або заповнення спеціального виду. Наприклад відображення f ∈ Inj (N, R) називається точним словом, а $f \in$ Sur (N, R) – повним заповненням**.** Нехай $N = \{1 < 2 < \ldots < n\}$ та К – довільна упорядкована множина. Клас Mon (N, R) складається з усіх R-слів $b_1\ b_2\ \ldots\ b_п$,, для яких $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_п$. Тому, Mon (N, R) можна назвати класом монотонних слів. Якщо зокрема, множина R – ланцюг, то монотонні слово довжини n дають всі мультимножини потужності n, складені з елементів множини R.

Існує рівно стільки монотонних слів довжини n, складених з алфавіту R, скільки n-мультимножин на множині R. У прикладі наведеному вище, 3-мультимножини пераховані в двох перших стовпчиках. Якщо обмежиться строго монотонними словами**,** то утвориться сімейство всіх підмножин потужності n множини R.

2.3. ВИСЛОВЛЮВАННЯ

2.3.1. Символьне визначення висловлювань

Закони логіки висловлень застосовують при побудові будь-якої із сучасних мов програмування. Задача формальної логіки складається у встановленні методів правильних умовиводів. Це робиться двома засобами:

1. за допомогою правил виводу;
2. за допомогою логічних законів.

Законами логіки висловлень називають схеми побудови істинних та помилкових суджень. Закони логіки висловлень ще називають теоремами або тезами логіки.

Закон виключного третього

p або (невірно, що **p**).

Якщо в запропоновану схему замість **p** підставити осмислене речення, то завжди утвориться істина складна пропозиція. Наприклад, якщо замість **p** підставимо речення: «Під час своїх мандрівок Платон побував в Індії», то одержимо складне речення:

Під час своїх мандрівок Платон побував в Індії = **p.**

(Під час своїх мандрівок Платон побував в Індії) або (невірно, що під час своїх мандрівок Платон побував в Індії).

Виконується одна з можливостей: або Платон побував в Індії, або ні. Якщо перше висловлення істина, тоді **p = 1**; якщо лож, тоді **p = 0.**

Якщо, **p = 1** або **p = 0** то стає неможливим будь-яке третє припущення. Саме тому наведений закон зветься законом виключного третього.

Закон непротиріччя

Невірно, що **[р** і (невірно, що **р**)].

Закон формулюється й таким чином: Невірно, що **[р** і (не **р**)].

Наприклад: Невірно, що {(Колумб був в Індії) і [не (був Колумб в Індії)]}.

Кожне з речень по одинці істинна. Людина, не може одночасно бути і не бути в якомусь місці. Колумб не міг одночасно бути і не бути в Індії. Якщо **р = 1** стає суперечливим, що **р = 0.**

У законах непротиріччя і виключного третього формулюються пропозиції виду **р** і **не р**. Таку пару називають суперечними пропозиціями. Закон непротиріччя іноді формулюють у такому виді: дві суперечні пропозиції не можуть бути одночасно істинними.

Закон подвійного заперечення

Якщо заперечити двічі деяке припущення, то в результаті утвориться, начебто ніякого заперечення не було. Наприклад, говорячи: «Не є істинною, що Петро цього не робив», ми, тим самим, підтверджуємо, що Петро цього не робив.

Загальний вид закону: Якщо [невірно, що (невірно, що **р**)], то не **р**.

Оборот «невірно, що **р**» замінимо на «**не р**» (~ **р**). У такому випадку закон формулюється у вигляді: Якщо [не (**не р**)], то **р**.

Пропозиція приймає значення лож **р = 0**, лише тоді, коли, те що заперечиться істинно. Навпаки, якщо пропозиція є неправильною **~ р = 0** (не р), то її заперечення є істинною [**~ (~ р) =1]**.

Зв'язок висловлюють символічно:

1. якщо **р** істинно, то **~ р** (не р) лож;
2. якщо **р** лож, то **~ р** (не р) істинно.

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

1 при **р** істинно **р** = 1;

2 при **р** лож **р** = 0.

1. Якщо **р** = 1, то **~ р** (не р) = 0;
2. якщо **р** = 0, то **~ р** (не р) = 1.

р	~ р
1	0
0	1

У таблиці в колонку під **р** записані символи пропозицій, які може приймати довільне речення. Застосовується й інша форма запису:

якщо р = А, то **~ р = ~А**.

Заперечення висловлення А (~А) необхідно розглядати, як функцію однієї перемінної.

Закон контрапозиції

Закон контрапозиції називають законом подвійного якщо:

Якщо (якщо **p**, то **q**), то [якщо **не q**, то **не p**)].

Якщо [(у Яна буде час), то (Ян відвідає Петра), але якщо (Ян не відвідає Петра), то в (Яна не було часу).

1. Ян відвідає Петра = **p;**
2. Ян не відвідає Петра = **q.** У Яна буде час = **n;**
3. у Яна не було часу = **m.**

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

Припущення **p** істинно, якщо **n** істинно.
Припущення **q** істинно, якщо **m** істинно.

n = 1 p = 1	m = 0 q = 0
m = 1 q = 1	n = 0 p = 0

Закон контрапозиції дає уявлення про логічну функцію двох змінних.

Закони алгебри логіки, які характеризують кон'юнкцію

Застосування союзу **і** при побудові висловлень зветься кон'юнкцією. Наприклад: (Дніпропетровськ розташований на Дніпрі) **і** (Київ розташований на Дніпрі).

Скорочена форма запису:

Дніпропетровськ розташований на Дніпрі = p;
Київ розташований на Дніпрі = q.

Якщо (p і q) то (q і p);
якщо (p і q) то p;
якщо (p і q) то q.

У логічних схемах існує правило, яке дає змогу застосовувати кон'юнкцію двох і більше істинних пропозицій:

Якщо p, то [якщо q. то (p і q)].

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

1. p = 1 і q = 1, то (p і q) = 1;
2. p = 1 і q = 0, то (p і q) = 0;
3. p = 0 і q = 1, то (p і q) = 0;
4. p = 0 і q = 0, то (p і q) = 0.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Якщо істині висловлення, які складають, кон'юнкцію, то кон'юнкція істина, і навпаки, якщо кон'юнкція істина, то істина кожна її складова. Кон'юнкція помилкова якщо помилкова хоча б одна її складова.

Закони імплікативних спілок

Імплікативними силогізмами є теореми, які подібні логічним схемам, називаним силогізмами. У традиційній логіці силогізмами вважають схеми умовиводів, які призводять від двох посилань до висновку, котрий має визначений вид. В імплікаціях обидва посилання, як і висновок, мають однаково визначений вид.

Наприклад:

- якщо завтра буде ясна погода, то не буде снігопаду;
- якщо завтра буде ясна погода, то з'являється можливість приємної прогулянки;
- **якщо** [(завтра буде ясна погода), **то** (не буде снігу), висновок, (з'явиться можливість приємної прогулянки)].

Завтра буде ясна погода посилання **= p;**
не буде снігу посилання **= q;**
з'явиться можливість приємної прогулянки висновок **= r.**

Скорочена форма запису:

якщо [(якщо p, то q) і (якщо p то r)], то [якщо p, то (q і r)].

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

1. p = 1 і q = 1 то $(p \rightarrow q) = 1$;
2. p = 1 і q = 0 то $(p \rightarrow q) = 0$;
3. p = 0 і q = 1 то $(p \rightarrow q) = 1$;
4. p = 0 і q = 0 то $(p \rightarrow q) = 1$.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Коли обидві посилки вірні, то висновок вірний. Якщо одна з посилок зрадлива, то і весь алгоритм зрадливий.

Закони, які характеризують диз'юнкцію.

Диз'юнкція завжди є комунікативною. Вона характерна спілкою **або.**

Наприклад:

- завтра буде дощ **або** завтра буде сонячно;
- завтра буде сонячно, **або** завтра буде дощ.

Завтра буде дощ p;
завтра буде сонячно q.

Якщо (**p** або **q**), то (**q** або **p**).

При диз'юнкції можливі підстановки: Якщо вірно, що завтра буде дощ, то одночасно не може бути сонячно.

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

1. якщо p = 1 і q = 1 то (p або q) = 1;
2. якщо p = 1 і q = 0 то (p або q) = 1;
3. якщо p = 0 і q = 1 то (p або q) = 1;
4. якщо p = 0 і q = 0 то (p або q) = 0.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Диз’юнкція істина тоді, коли один з її членів є істинним.

Закон, що характеризує еквівалентність

Якщо (**p** тоді і лише тоді, коли **q**), то (**q** тоді і лише тоді, коли **p**).

Наприклад:

Якщо [(наступає туман) тоді і лише тоді, коли відносна вологість повітря перевищує 100%)], [(відносна вологість повітря перевищує 100% тоді і лише тоді, коли наступає туман)].

Еквівалентність комунікативна.

Якщо (**p** тоді і лише тоді, коли **q**), то (якщо **p** то **q**).

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

1. якщо p = 1 і q = 1, то $(p \leftrightarrow q) = 1$;
2. якщо p = 1 і q = 0, то $(p \leftrightarrow q) = 0$;
3. якщо p = 0 і q = 1, то $(p \leftrightarrow q) = 0$;
4. якщо p = 0 і q = 0, то $(p \leftrightarrow q) = 1$;

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Еквівалентність істинна коли обидва її члена одночасно або істинні, або помилкові.

Закони де-Моргана

1. [Не (**p** або **q**)] тоді і лише тоді, коли [(**не p**) і (**не q**)].
2. [Не (**q** і **не p**)] тоді і лише тоді, коли [(**не p** або **не q**)].

Обидва закони мають численні застосування, у першу чергу при підстановках.

Наприклад

{Невірно, що [(завтра буде одночасно сонячно), і (завтра буде одночасно дощ)]}.

завтра буде сонячно **p;**

завтра буде дощ **q.**

[Краще: Невірно, що завтра буде сонячно і завтра буде дощ тоді і лише тоді, коли завтра не буде сонячно або завтра не буде дощ]

Всі підстановки при використанні законів де-Моргана істині з винятковою очевидністю. Ці закони можна характеризувати як: заперечення диз’юнкції еквівалентно кон’юнкції заперечень, тоді коли заперечення кон’юнкції еквівалентно диз’юнкції заперечень.

2.4. ЗАКОНИ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

2.4.1. Нормальні форми та засоби побудови нормальних форм числення висловлювань

Існують три принципово різні семантичні вирази алгебри логіки:

$$(P \vee \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q). \quad (1)$$

$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge q). \quad (2)$$

$$(P \vee \sim Q) \rightarrow (\sim P \wedge Q). \quad (3)$$

Відзнаки виразів наведені в таблиці 1

Таблиця 1

p	Q	~ p	~q	P ∨ ~ q	~ p ∧ q	(p ∨ ~ q) ∨ (~ p ∧ q)	(p ∨ ~ q) ∨ (~ p ∧ q)	(p ∨ ~ q)→ (~ p ∧q)
1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0

- вираз $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ при будь-якому розподілі значень пропозиціональних змінних приймає логічне значення **істина**;
- вираз $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$ завжди приймає логічне значення **неправда**;
- вираз $(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$ не істинний, а й не є **неправдою**, він зветься **нейтральним**.

Таким чином, у алгебрі логіки зустрічаються три види виразів:

1. загальнозначущі – такі вирази, які при кожному наборі значень своїх пропозиціональних змінних приймають лише значення істина. Загальнозначущі вирази називають законами логіки висловлень;
2. протиріччя – вирази, які при будь-якому наборі пропозиціональних змінних приймають лише значення неправда;
3. нейтральні висловлення – такі вирази, котрі набувають, принаймні, при одному наборі значень пропозиціональних змінних, які в них зустрічаються, значення неправда;
4. виконаними виразами називаються такі вирази, котрі, принаймні, при одному розподілі значень істинності пропозиціональних змінних, які в них зустрічаються, приймають значення істина.

Будь-який вираз алгебри логіки завжди перетворюється в одну з форм, яка називається нормальною. Вираз в нормальній формі містить у собі лише заперечення, кон'юнкцію або диз'юнкцію.

Перетворення форм

Імплікація (як наведено в таблиці 2) може бути перетворена в диз'юнкцію $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$**,** тому що обидві мають однаковий порядок значень.

Таблиця 2

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

Є цілий ряд перетворень імплікацій, наприклад:

$p \rightarrow \sim q$, $\sim p \rightarrow \sim q$, $\sim (p \rightarrow q)$, $(p \wedge q) \rightarrow r$.

Для перетворень імплікацій у диз'юнкцію достатньо запам'ятати правило: вираз $\sim p \vee q$ завжди можна одержати з $p \rightarrow q$.

$$\begin{array}{ccc} p & \rightarrow & q \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \sim p & \vee & q \end{array}$$

1. p – антецедент імплікації замінюється своїм запереченням;
2. $\rightarrow$ – константа імплікації замінюється константою $\vee$ для диз'юнкції;
3. q – консеквент імплікації береться без зміни.

Імплікація (як наведено в таблиці 3) перетвориться в диз'юнкцію з таким же порядком значень істинності, якщо її антецедент заперечується, константа імплікації замінюється константою диз'юнкції, а консеквент береться без змін. Відповідно до цього припустимі такі перетворення:

Таблиця 3

$p \rightarrow \sim q$ $\downarrow$ $\sim p \vee \sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$ $\downarrow$ $\sim \sim p \vee \sim q$	$\sim (p \rightarrow q)$ $\downarrow$ $\sim (\sim p \vee q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$ $\downarrow$ $\sim (p \wedge q) \vee r$

Диз'юнкція (як наведено в таблиці 4) перетвориться в імплікацію з таким же порядком значень істинності, якщо її перший член заперечиться, константа диз'юнкції замінюється константою імплікації, а її другий член береться без зміни. Відповідно до цього припустимі такі перетворення:

Таблиця 4

$p \vee q$	$p \vee \sim q$	$\sim (\sim p \vee q)$	$\sim (p \wedge q) \vee q$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\sim p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim (\sim \sim p \rightarrow q)$	$\sim \sim (p \wedge q) \rightarrow r$
		$\downarrow$	$\downarrow$
		$\sim (p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$

Кон’юнкція перетвориться в диз’юнкцію з таким же порядком значень істинності, якщо:

1. обидва члени замінюються їхніми запереченнями;
2. $\wedge$ замінюється $\vee$ і заперечується весь вираз;
3. відповідно, $p \wedge \sim q$ перетвориться в $\sim (\sim p \vee \sim \sim q)$ і в остаточному підсумку спрощується в $\sim (\sim p \vee q)$.

Диз’юнкція перетвориться в кон’юнкцію з таким же порядком значень істинності, якщо:

1. обидва члени замінюються їх запереченнями;
2. $\vee$ заміняється на $\wedge$ і заперечується весь вираз

$\sim (\sim p \vee \sim q) \sim \sim (\sim \sim p \wedge \sim \sim q)$ $\quad\quad$ $p \wedge q$.

Зв’язок між виразами алгебри логіки наведено у таблиці 5

Таблиця 5

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

З таблиці істинності видно, що:

1. вирази $p \rightarrow q$ і $\sim p \vee q$ семантично еквівалентні;
2. еквіваленція $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ загальнозначуща.

Два вирази семантично еквівалентні лише тоді, коли утворена з них еквіваленція загальнозначуща.

Правило підстановки: у загальнозначущому виразі алгебри логіки замість будь-якої пропозиціональної змінної можна підставити будь-який вираз за умови, що це здійснюється для усіх входжень цієї змінної.

Вираз одних спілок через інші

- Перехід від імплікації до диз’юнкції: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$;

$\boxed{\equiv \quad \text{тотожність}}$ $\quad\quad$ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$;

- перехід від кон'юнкції до диз'юнкції: $p \wedge \sim q \equiv \sim(\sim p \vee \sim\sim q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$;
- закон подвійного заперечення: $\sim(\sim p) \equiv p$;
- перший закон де Моргана – заперечення кон'юнкції $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$;
- другий закон де Моргана – заперечення диз'юнкції $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

Закони де Моргана використовуються для перенесення заперечень, які застосовані до складних висловлень. Вони є законами вираження одних спілок через інші. За допомогою цих законів, використовуючи еквівалентність, можна виключати імплікацію з будь-якої формули. Еквівалентність є відношенням між формулами. При її допомозі подвійна імплікація виражається:

1. через кон'юнкцію й імплікацію еквівалентністю
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$; $\quad p \leftrightarrow q = r$;
2. через кон'юнкцію, диз'юнкцію і заперечення еквівалентністю
$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$; $\quad p \leftrightarrow q = r$;
3. через кон'юнкцію і заперечення еквівалентністю
$p \leftrightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)$. $\quad p \leftrightarrow q = r$.

Закон контрапозиції: $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ означає, що замість істинності висловлення $p \to q$ можна доводити обернене, протилежне йому твердження $\sim q \to \sim p$**.** При цьому, $\sim q \to \sim p$ є конверсією контрапозиції. При кон'юнкції імплікацій одержуємо $(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv p$ -q.

З визначення відношень еквівалентності безпосередньо випливає, що воно рефлексивно, симетрично, транзитивне.

1. $r \equiv r$ для будь-якої формули r рефлексивно;
2. якщо $r_1 \equiv r_2$, то $r_2 \equiv r_1$ симетрично;
3. якщо $r_1 \equiv r_2$ і $r_2 \equiv r_3$, то $r_1 \equiv r_3$ транзитивне відношення, то воно справедливе для будь-яких формул r_1, r_2, r_3.

Можливість виразу того самого висловлення еквівалентними формулами відбиває можливість виразу однієї і тієї ж думки за допомогою висловлень різноманітних логічних структур. Відношення еквівалентності дає змогу, зокрема, виражати одну логічні операції через іншу.

Наприклад:

Якщо необхідно досліджувати еквіваленцію $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \to q))$, то її перетворюють у дві імплікації, які досліджуються окремо. Спочатку розглянемо імплікацію $(p \wedge q) \to (p \to q)$.

Припустимо, що консеквент $(p \to q)$ невірний, тому p істинно, q невірно. Через хибність q антицендент невірний. Отже, цей вираз загальнозначущий. Роздивимося імплікацію $(p \to q) \to (p \wedge q)$. Є три набори значень істинності, при яких консеквент невірний. Серед них є один набір значень, коли антецедент також невірний (якщо p істинно, а q невірно). Але це ще не говорить про те, що вираз загальнозначущий. Існують два будь-яких набори значень, при яких усі вирази невірні:

1. коли p невірно, та q істинно;
2. коли p та q обидва помилкові.

Досліджувана еквіваленція була б загальнозначущою, якби обидві імплікації були загальнозначущі. Лише перша імплікація є загальнозначущою.

2.4.2. Рішення виразів символічної логіки за допомогою нормальних форм. Числення висловлювань

Для рішення деякого виразу символічної логіки (тобто для встановлення до якого класу він належить) його спочатку призводять до нормальної форми. Нормальна форма повинна задовольняти таким умовам:

1. бути семантично еквівалентною первісному виразу;
2. в зв'язку з логікою висловлень, в ній повинні утримуватися лише знаки заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції;
3. знаки заперечення, що зустрічаються, повинні ставитися лише до пропозиціональних змінних, але не до складних виразів.

Приведемо до нормальної форми вираз:

$$\sim (p \vee \sim q) \to \to \sim (\sim p \wedge q). \qquad (4)$$

Насамперед, необхідно подбати про виконання другої умови, а вже потім проводити перетворення, для виконання третьої умови. Для цього спочатку необхідно усунути знаки імплікації з виразу (4). Перетворення імплікації в диз'юнкцію призводить до такого виду:

$$\sim \sim (p \vee \sim q) \vee \sim (\sim p \wedge q). \qquad (5)$$

Перетворення імплікації в диз'юнкцію призвело до того, що лівий член заперечиться двічі. Відповідно до правила, вираз може бути зведено до такого:

$$(p \vee \sim q) \vee \sim (\sim p \vee q). \qquad (6)$$

Тепер правий член необхідно перетворити так, щоб було виконано умову про відношення знаків заперечення лише до пропозиціональних змінних. Для цього правий член виразу перетворимо в диз'юнкцію:

$$(p \vee \sim q) \wedge \sim \sim (\sim \sim p \vee \sim q). \qquad (7)$$

Після скорочення подвійних знаків заперечення утворюється вираз:

$$(p \vee \sim q) \vee (p \vee \sim q). \qquad (8)$$

Вираз (8) є нормальною формою виразу (4).

Доцільно не брати до уваги знаки заперечення, тому що вони нерідко скорочуються в процесі перетворення. Якщо нормальна форма містить заперечення, то потребує додаткових перетворень. При цьому виконуються правила дистрибутивності:

1. від $p \vee (q \wedge r)$ можна перейти до $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ і навпаки. Обидва вирази мають той самий розподіл значень істинності;
2. від $p \wedge (q \vee r)$ можна перейти до $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Правила дистрибутивності гарантують, що вираз, отриманий з їх допомогою, семантично еквівалентний первісному. За допомогою правил дистрибутивності з будь-якого виразу алгебри логіки після приведення до нормальної форми, можна одержати його кон'юнкцію і диз'юнкцію нормальної форми. Кон'юнктивна нормальна форма виразу $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – кон'юнктивна диз'юнкція, яка виконує усі умови нормальної форми. Члени диз'юнкцій (із запереченнями або без них) є пропозиціональними змінними. Кон'юнктивна нормальна форма дає змогу дізнатися, є вираз загальнозначущим або ні.

Дослідимо вираз: $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$. Спочатку складемо нормальну форму:

$$\sim (p \wedge q) \wedge (p \wedge q);$$

$$\sim (\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge q);$$

$$(\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q).$$

Вираз складається з диз'юнкції і кон'юнкції. Але нам необхідна кон'юнкція диз'юнкцій. Візьмемо перше правило дистрибутивності. Замість p введемо $(\sim p \vee \sim q)$, одержимо:

$$((\sim p \vee \sim q) \vee p) \wedge ((\sim p \vee \sim q) \wedge q).$$

Вирази $(p\ (\ q \vee r)$ та $((p \vee q) \vee r$ і $(p \vee q \vee r)$ семантично еквівалентної. Їх можна переписати у виді: $(\sim p \vee \sim q \vee p) \vee (\ \sim p \vee \sim q \vee q)$. Кон'юнкція диз'юнкцій еквівалентна початковому виразу, її члени є пропозиціональними змінними.

Якщо з кон'юнктивної нормальної форми виразу можна дізнатися, чи є він загальнозначущим, то диз'юнктивна нормальна форма дає змогу визначити, чи є вираз суперечливим. Диз'юнктивна нормальна форма є диз'юнкцією кон'юнкцій. Вона виконує всі умови нормальної форми. Члени цих кон'юнкцій є пропозиціональними змінними (із запереченням або без нього).

Приведемо вираз $p \wedge [(\sim p \wedge q) \vee (q \wedge \sim p)]$ до диз'юнктивної нормальної форми. Приймемо, що p лишається незмінним, $(\sim p \wedge q)$ підставляється замість q, замість r підставляється $(q \wedge \sim q)$. Одержимо:

$$(p \wedge (\sim p \wedge q)) \vee (p \wedge (q \wedge \sim q));$$

$$(p \wedge \sim p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \sim q).$$

Обидві кон'юнкції містять вираз виду $p \wedge \sim p$**.** Вони при будь-якому наборі значень змінних помилкові, тобто є протиріччями, тому що кон'юнкція містить помилковий член. Обидва члени диз'юнкції є протиріччями. Таким чином, вона і сама є протиріччям. Отже, і початковий вираз також суперечення.

Вирази алгебри логіки є протиріччям, якщо в кожній кон'юнкції, яка складає диз'юнктивну нормальну форму, деяка пропозиціональна змінна входить один раз із запереченням, а іншим разом без нього. Якщо ж цього немає хоча б в одній кон'юнкції, то вираз не є протиріччям, тобто він загальнозначущий або нейтральний.

2.5. ДЕДУКТИВНІ УМОВИВОДИ ТА ДОКАЗИ

2.5.1. Тотожна істинність формул дедуктивних умовиводів

Сілогістичні побудови – основи умовиводів, слід уявляти як булеві функції. Булеві функції й операції над ними зручно розглядати, використовуючи поняття "множина". Припустимо, що кожна з множин складається з декількох підмножин. Якщо глобальну множину визначати як U, то вхідні в неї підмножини A, B, C, і т.д. Надалі, глобальна множина буде розглядатися як функція U**,** підмножини, як її змінні x_1, x_2, x_3, і т.д.

$$A = x_1, \qquad B = x_2, \qquad C = x_3.$$

Функція $f\ (x_1,\ x_2,\ \dots x_n)$ де: $x = \{0,\ 1\}$, називається функцією алгебри логіки, або булевою функцією.

Таблиця істиності (6) булевої функції від **n** змінних має вид:

Таблиця 6

x_1	X_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_n)$
0	0	0	
…	…	…	
…	…	…	
1	1	1	

Якщо число змінних **n,** то таблиця має $2^п$ рядків. Це відповідає усім комбінаціям змінних, які можна визначити. В кожному рядку спочатку задається набір значень змінних, а потім значення функції на цьому наборі.

Суттєві і несуттєві змінні

Булева функція при $f \in P_n$ істотно залежить від змінних x_i, якщо існує набір таких змінних: $a_1, \ldots, a_{i+1}, \ldots, a_п$, при якому:

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_п) \neq f'(a'_1, \ldots, a'_{i-1}, 1, a'_{i+1}, \ldots, a'_п).$$

У такому випадку $\mathbf{x_i}$ – суттєва змінна, у протилежному – $\mathbf{x_i}$ несуттєва змінна.

Приклад

Нехай функції $f_1\ (x_1, x_2)$ і $f_2\ (x_1, x_2)$ задані такою таблицею істинності:

Таблиця 7

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Для цих функцій x_1 – суттєва змінна, а x_2 – несуттєва змінна. Булеві функції рівні, якщо утворюються видаленням або додаванням несуттєвих змінних. Усюди надалі булеві функції будемо розглядати з точністю до несуттєвих змінних. Це дає змогу вважати, що всі булеві функції (у даній системі функцій) залежать від однакових змінних.

Операції алгебри логіки Буля

Операції булевої алгебри розглядаємо при використанні поняття “множина”. Під множиною розуміємо сукупність елементів будь-якої природи, які підпорядковані рахуванню. Зміст процедури рахування складається в установленні взаємно однозначної відповідності між елементами. Питання, пов’язані з необмеженою кількістю елементів в булевій алгебрі не розглядаються.

Нехай дана сукупність предметів, які після перерахування можна позначити як: **U** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}. Припустимо, що перша частина предметів, як-от: 1, 2, 4, і 6, мають круглу форму. Друга частина – 2, 3, 4, 8, і 9 пофарбована в білий колір. У цьому випадку множина **U** має дві підмножини: А = {1, 2, 4, 6}. В {2, 3, 4, 8, 9}.

$$\begin{cases} \text{A – множина круглих предметів} \\ \text{B – множина білих предметів} \end{cases}$$

Вихідну множина називають фундаментальною, а підмножини А і В – просто множинами.

У результаті якісного аналізу фундаментальної множини одержимо чотири класи елементів:

C_0 {5, 7, 10, 11} – елементи, які не володіють жодною з названих властивостей,

C_1 {1, 6} – елементи, які володіють лише властивістю А (бути круглими),

C_2 {3, 8, 9} – елементи які мають властивість бути білими,

C_3 {2, 4} – елементи, які володіють одночасно двома властивостями.

Зображення класів елементів показане (рис.1) на діаграмі Ейлера-Венна:

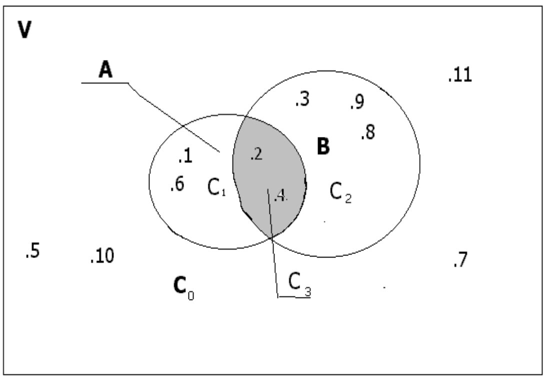


Рис.12

Графічне відображення (рис.2) операції вмикання в булевій алгебрі:

Рисунок 2 показує, що множина А цілком включена в множину В.

$A \subset B = \{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Якщо одночасно виконуються дві умови: $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$

У такому випадку множини А і В цілком еквівалентні.

Після визначення елементів, множин починаємо операції над ними. Графічне відображення (рис. 3) операції об'єднання в булевій алгебрі:

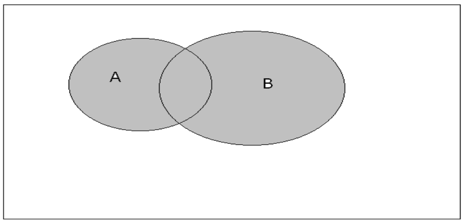


Рис.13

$A = \{1, 2, 4, 6\}$ $B = \{2, 3, 4, 8, 9\}$

Нехай $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Об'єднанням охоплюються три класи елементів – C_1, C_2, C_3.

Тому, що x належить А або В, використовуємо таку форму запису:

$x \in A \cup B = (x \in A) \vee (x \in B)$,

З погляду алгебри логіки, замість однієї змінної x зручно ввести дві логічних змінних x_1, і x_2. Областю визначення $\mathbf{x_1}$, і $\mathbf{x_2}$ будуть не числа натурального ряду, а два логічних значення: 1 – для істинного значення і 0 – для помилкового.

Приклад

Нехай x = 7. Оскільки це число не належить ні множині А, ні множині В, то логічні значення змінних будуть $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Комбінація змінних відповідає класу C_0.

Припустимо, що вибрано число 4. Воно входить як в А так і у В. Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, що відповідає класу C_3.

Нехай x = 6. Маємо $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, для x = 8 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, що відповідає класам C_1 і C_2..

Змінні x_1 і x_2 визначають логічну функцію: $y = f(x_1, x_2)$, яка у випадку диз'юнкції може бути записана як пропозиціональна низка: $y = x_1 \vee x_2$. Число 7 не входить в об'єднання множин $A \cup B$, тому при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ значення логічної низки дорівнює 0. Коли ж вибираються числа 4, 6, або 8, то вони потрапляють в область діаграми.

При цих значеннях функція (як показано в таблиці 8) дорівнює:

Таблиця 8

Умова	x_1	x_2	$y = x_1 \vee x_2$.
x = 7	0	0	0
x = 6	1	0	1
x = 8	0	1	1
x = 4	1	1	1

Число одиниць і нулів для функції U визначає загальне число можливих операцій на двох множинах.
Графічне відображення (рис.4) операції перетинання в булевій алгебрі:

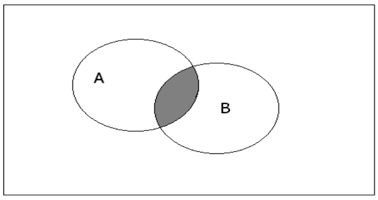


Рис.14

Перетинанням множин A і B називається множина $A \cap B$, яка містить ті елементи A і B, що входять одночасно в обидві множини. Для нашого приклада будемо мати: $A \cap B = \{1, 2, 4, 6\} \cap \{2, 3, 4, 8, 9\} = \{2, 4\} = C_3$,

Належність x одночасно A і B можна представити виразом:

$x \in A \cap B = (x \in A) \wedge (x \in B)$.

Якщо в таблиці істинності диз'юнкції усе нулі замінити одиницями, а всі одиниці нулями, то одержимо взаємну двоїстість диз'юнкції і кон'юнкції. Для будь-якої логічної операції можна знайти двоїсту.

При перетинанні множин C_1 і C_3 $C_1 = \{1, 6\} \cap C_3 \{2, 4\}$,

Множина $\bar{A}$ – доповнена (рис. 5):

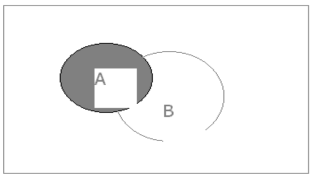


Рис.15

При перетинанні множин C_0 і C_2 одержуємо $A \cap \bar{A} = 0$ порожню множину. При кон'юнкції (як показано в табл. 9) одержуємо таку таблицю істинності:

Таблиця 9

x_1	x_2	$y = x_1 \wedge x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

На діаграмі Ейлера-Венна (рис.6) порожня множина має вигляд:

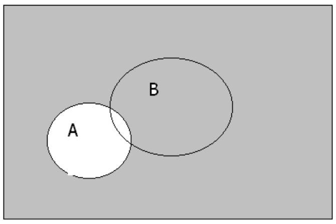


Рис.16

При утворенні доповненої множини говоримо про тавтологію. При утворенні порожньої – про протиріччя. Для логічних функцій, що мають відповідні назви виконуються такі рівності:

$y = x \vee \bar{x} = 1$ – тавтологія,

$y = x \wedge \bar{x} = 0$ – протиріччя.

Множина A доповнює множину $\bar{A}$ до фундаментальної множини U, звідси назва – доповнена множина, логічна операція називається доповнення. При утворенні порожньої множини операція називається заперечення. Операції перетинання і доповнення в булевих алгебрах для чотирьох аналізованих областей позначаються в такий спосіб:

$C_0 = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad C_1 = A \cap \bar{B}, \quad C_2 = \bar{A} \cap B, \quad C_3 = A \cap B.$

Шляхом об'єднання відповідних областей C_I можна уявити будь-яку множинну операцію, у тому числі і саме об'єднання:

$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cap (A \cap B)$.

Всё це поширюється і на алгебру логіки:

$$y = x_1 \vee x_1 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2) .$$

Операції стрілка Пірса і штрих Шеффера в символічній логіці

Операція стрілка Пірса визначає об’єднання двох і більш доповнених (узятих із запереченням) областей до фундаментальної множини. На діаграмі Ейлера-Венна (рис. 17) вона позначається такий чином:

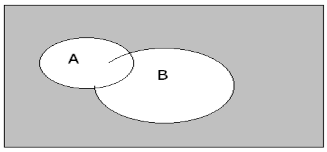


Рис.17

Мовою алгебри логіки формули операції стрілки Пірса мають вигляд:

$(x_1 \vee x_2) \vee (x_1 \downarrow x_2) = 1, \quad (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \downarrow x_2) = 0.$

Логічна операція штрих Шеффера (рис. 8) визначає перетинання доповнених областей до фундаментальної множини. Діаграма Ейлера-Венна має вигляд:

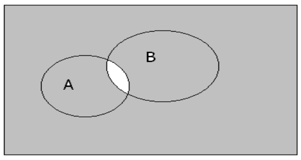


Рис.18

Мовою алгебри логіки формули операції перетинання мають вигляд:

$(x_1 \vee x_2) \vee (x_1 \updownarrow x_2) = 1, \quad (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \updownarrow x_2) = 0.$

Таблиця істинності (10) для логічної операції стрілка Пірса має вигляд:

Таблиця 10

x_1	x_2	$y = x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

З таблиці видно, що:

$$y = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2).$$

Таблиця істинності (11) для логічної операції штрих Шеффера має вигляд:

Таблиця 11

x_1	x_2	$y = x_1 \updownarrow x_2$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

З таблиці видно, що:

$$y = x_1 \updownarrow x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2).$$

Різницею між множинами А і В називається сукупність тих елементів множини А, що не ввійшли в В:
A - B = {1, 2, 4, 6} - {2, 3, 4, 8, 9} = {1, 6} = C1.

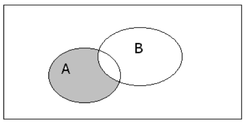


Рис.19

Діаграма Ейлера-Венна (рис.9) для різниці множин має такий вид:
Таблиця істинності (12) для різниці множин:

Таблиця 12

x1	x2	У = x1 - x2
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	0

Для логічної функції різниці множин справедлива рівність:

$$y = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1 - x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = (x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2).$$

Діаграма Эйлера-Венна (рис.10) має вигляд:

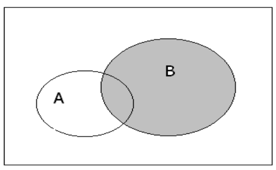


Рис.20

На діаграмі видно, що при імплікації відбувається часткове вмикання множини А в множину В.
Таблиця істинності (13) має вигляд:

Таблиця 13

X_1	x_2	$y = x_1 \to x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Логічна функція має такий вид запису:
$(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \vee (\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2) = 1, \quad (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \wedge (\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2) = 0.$

Симетричною різницею множин А и В є об'єднання двох різниць:

А + В = (А - У) $\cup$ (В - А) = {1, 3, 6, 8, 9} = С1 $\cup$ С2 = {1, 6}$\cup$ {3, 8, 9}.
Діаграма Ейлера-Венна для симетричної різниці (рис. 11) має вигляд:
Функція при симетричній різниці подана в такий спосіб:

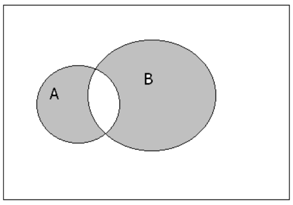


Рис.21

$(x_1 + x_2) \vee (x_1 \sim x_2) = 1.$

$(x_1 + x_2) \wedge (x_1 \sim x_2) = 0.$

Симетрична різниця має декілька назв:

- строга диз'юнкція, що виключає альтернативу;
- сума по модулі два.

Симетричну різницю можна визначити словами: «або А, або В», тобто це логічна низка «або», але без вмикання в неї низки «і».

Еквівалентність

Визначається тими елементами множин А і В, що є для них загальними. Але елементи не вхідні ні в множину А, ні в множину В, також рахуються еквівалентними.

Діаграма Ейлера-Венна (рис.12) для еквівалентності має вид:

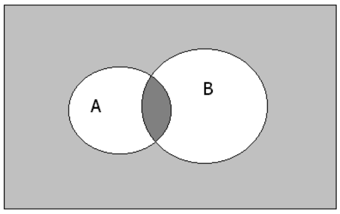


Рис.22

З умов додатковості випливає таке співвідношення:

$$y = x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 + x_2} = (x_1 \wedge x_2) \wedge (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \wedge x_2) \wedge (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2).$$

Таблиця істинності еквівалентності (14) має такий вигляд:

Таблиця 14

x_1	x_2	$y = x_1 - x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

2.5.2. Закони логіки та їх порівняння з арифметичними виразами

У якості основних законів в алгебрі логіки називають:

1. **Закон идемпотичності**:
- a = a ∧ a   множина **a** дорівнює спілці множин **a** «і» **a**;
- a = a ∨ a   множина **a** дорівнює **a** «або» **a**.

2 Закон комунікативності:
- a ∧ b = b ∧ a   сплучення множин **a** «і» **b** дорівнює спілці множин **b** «і» **a**;
- a ∨ b = b ∨ a   альтернатива **a** «або» **b** дорівнює альтернативі **b** «або» **a**.

3 Закон асоціативності:
- a ∧ (b ∧ c) = (a ∧ b) ∧ c   при сполученні трьох різноманітних множин їх перестановка не змінює змісту глобальної множини.

4 Закон дистрибутивності:

- a ∧ (b ∨ c) = (a ∧ b) ∨ (a ∧ c), при альтернативі між множинами **b** і **c** та сполученні такої альтернативи з множиною **a**, вірно, що спілка множин **a** і **b** альтернативна спілці множин **a** і **c**;
- a ∧ (b ∧ c) = (a ∧ b) ∧ (a ∨ c), при виборі між множиною **a** або асоціацією множин **b** і **c** дійсна асоціація між альтернативами множин **a** «або» **b** або ж **a** «або» **c**.

5 Закон нуля й одиниці:

- a ∧ ā = 0 при об'єднанні множин **a** і доповненої множини **ā** глобальна множина обертається в порожню або дорівнює 0;
- a ∧ 1 = 1, сполучення множини **a** з одиницею дорівнює одиниці;
- a ∨ ā = 1 альтернатива множини **a** і доповненої множини **ā** дорівнює 1;
- a ∧ 0 = a альтернатива множини **a** і 0 дорівнює множині **a**.

6. Закон поглинання:

- a ∨ (a ∧ b) = a при альтернативі множини **a** і асоціації **a** і **b** множина **b** поглинається множиною **a**;
- a ∧ (a ∨ b) = a при сполученні множини **a** і альтернативі множин **a** «або» **b** - множина **b** поглинається множиною **a**.

7. Закони де Моргана:

$$\overline{a \vee в} = \bar{a} \wedge \bar{в}, \qquad \overline{a \wedge в} = \bar{a} \vee \bar{в};$$

- альтернатива усередині доповненої множини, що включає **a** і **b,** дає асоціацію двох доповнених множин – доповненої множини А і доповненої множини В;
- при альтернативі двох доповнених множин – доповненої множини А і доповненої множини В, утворюється єдина доповнена множина.

8. Закони склеювання:

$$(a \vee \bar{в}) \wedge (a \vee в) = a, \qquad (a \wedge \bar{в}) \vee (a \wedge в) = a.$$

- при сполученні двох альтернатив: множини **a** і доповненої множини **b**; а також альтернативі множини **a** і множини **b** одержуємо множину **a**;
- при альтернативі двох сполучень: множини **a** і доповненої множини **b**, а також множин **a** і **b** одержуємо множину **a**.

З законів: одиниці і нуля, поглинання, де Моргана, склеювання – можна зробити висновок, що доповнену множину аналізуємо і як заборону - **ā** - «НЕ А». Заборона має й іншу форму запису при виконанні логічних операцій – ˥ **НЕ А.** Закон поглинання нуля й одиниці буде читатися в таким чином: при асоціації А і НЕ А одержуємо 0, при альтернативі А і НЕ А – одержуємо одиницю.

Закон де Моргана відповідно набуває вигляду: в альтернативі заборон А «і» В одержуємо заборону А і заборону В.

Закон склеювання матиме вигляд: у сполученні альтернатив А і НЕ В а також альтернативи А або В одержуємо А.

Порівняння тотожностей алгебри логіки й арифметичних виразів наведено в таблиці 15

Таблиця 15

Тотожності алгебри логіки	**Арифметичні вирази**
$a \vee b = b \vee a$	$a + b = b + a$
$a \wedge b = b \wedge a$	$a * b = b * a$
$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a + (b + c) = (a + b) + c$
$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a * (b * c) = (a * b) * c$
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a * (b + c) = a *b + a * c$
$a \wedge 1 = a$	$a * 1 = a$
$a \vee 0 = a$	$a + 0 = a$
$a \wedge 0 = 0$	$a * 0 = 0$

Не всі вісім законів незалежні друг від друга. Закон идемпотичності можна одержати з закону поглинання при використанні закону дистрибутивності:

$$a = a \vee (a \wedge b) = (a \vee a) \wedge (a \vee b) = (a \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge (a \vee b)) = a \vee a.$$

Закон поглинання може бути виведений із закону нуля й одиниці:

$$a \vee (a \wedge b) = (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) = a \wedge (1 \vee b) = b \wedge 1 = b.$$

Закон идемпотичності щодо диз'юнкції безпосередньо виводиться з законів нуля й одиниці:

$$a \vee a = (a \vee a) \wedge 1 = (a \vee a) \wedge (\bar{a} \vee a) = a \vee (a \wedge \bar{a}) = a \vee 0 = a.$$

При логічних доказах завжди необхідно мати на увазі принцип двоїстості – можливість заміни диз'юнкції кон'юнкцією і навпаки. У цьому випадку ланцюжок рівностей для закону поглинання може бути поданий таким чином:

$$a \wedge (a \vee b) = (a \vee 0) \wedge (a \vee b) = b \vee (0 \wedge b) = a \vee 0 = a.$$

У якості незалежної системи законів можна вибрати закони: комунікативності, асоціативності, дистрибутивності, нуля й одиниці.

2.5.3. Застосування логічної побудови контактних схем у символічній логіці висловлювань

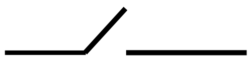
У 1910 році петербурзький фізик П. Эренфест висловив думку про можливість інтерпретації теорії складних висловлень на фізичних і технічних явищах. Найпростішим випадком застосування теорії висловлень в техніці є аналіз контактних електричних схем.

Припустимо, що електричний струм йде від якого-небудь джерела до споживача через один або декілька контактів. Кожен контакт може бути розімкнутий або замкнутий. Перший стан перешкоджає проходженню струму, другий пропускає струм.

Сформулюємо головну задачу: знаючи, які контакти в даний момент часу замкнуті, визначити, чи буде проходити струм по ланцюгу.

Поставимо у відповідність кожному контакту висловлення, визначивши при цьому контакти буквами p, q, r, ... Контакти тепер будуть пропозиціональними змінними, кожна з яких може приймати лише одне з двох значень:

контакт розімкнутий:

по визначенню = 0  (ланцюг розімкнутий)

контакт замкнутий

по визначенню = 1  (ланцюг замкнутий)

Два стани уподібнюються значенню істинності висловлення (істинно або лож)

Основні операції і відповідні їм найпростіші схеми

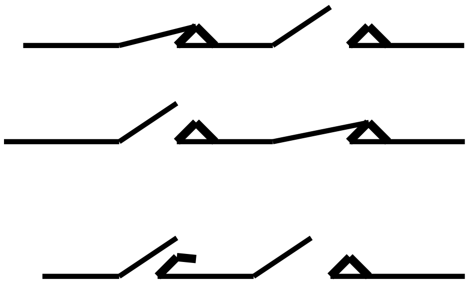
Добутком двох контактів p * q називається схема, отримана у результаті послідовного з'єднання.

Ланцюг буде замкнутий (рис. 23) лише тоді, коли обидва контакти будуть замкнуті. У цьому випадку говорять, що ланцюг дорівнює 1:

$p = 1 \quad q = 1,$

P q $p * q = 1 * 1 = 1.$

Рис.23



Якщо ж хоча б один із контактів розімкнутий (рис.24), ланцюг дорівнює 0:

p q $p = 1$ $q = 0$,
$p * q = 0$.

p q $p = 0$ $q = 1$,
$p * q = 0$.

p q $p = 0$ $q = 0$,
$p * q = 0$.

Рис.24

Стан ланцюга p * q можна відобразити таблицею істинності:

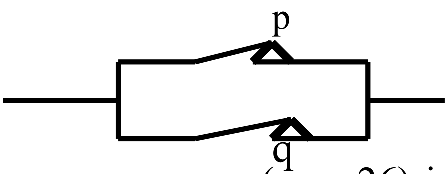
p	q	p * q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
1	0	0

Як відомо, такою самою таблицею істинності задається зміст кон'юнкції. Таким чином, найпростіша схема послідовного з'єднання двох контактів може бути описана законом кон'юнкції ($p \wedge q$). Формулою ($p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$) можна описувати схему з послідовно з'єднаними контактами. У електротехніці така схема називається «схемою І» або «схемою збігів».

Сумою контактів p і q позначається («p + q») називається схема утворена рівнобіжним з'єднанням.

Ланцюг буде замкнутий (дорівнює 1) лише тоді, коли замкнутий (дорівнює 1) хоча б один з утворюючих схему контактів.

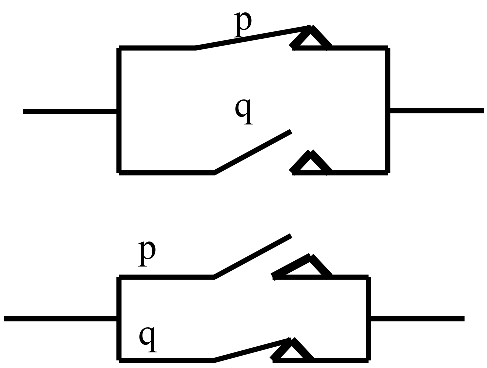
Якщо обидва контакти замкнуті (рис.25), то ланцюг буде замкнутим:



$p = 1 \;\; q = 1,$
$p + q = 1 + 1 = 1.$

Рис.25

Ланцюг буде замкнутим (рис. 26) і в тому випадку, якщо один із контактів замкнутий (дорівнює 1), а інший розімкнутий (дорівнює 0):

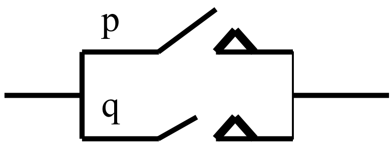


$p = 1 \;\; q = 0,$
$p + q = 1 + 0 = 1.$

$p = 0 \;\; q = 1,$
$p + q = 0 + 1 = 1.$

Рис.26

Коли обидва контакти розімкнуті (рис. 27), то ланцюг буде розімкнутий (дорівнює 0):



$p = 0 \;\; q = 0,$
$p + q = 0 + 0 = 0.$

Рис.27

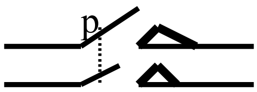
Стан ланцюга p + q можна висловити таблицею істинності:

p	q	p + q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

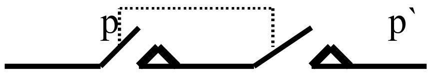
Такою ж таблицею істинності задається зміст диз’юнкції. Найпростіша схема рівнобіжного з’єднання двох контактів може бути описана формулою з двома змінними. Формула $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ буде описувати схему рівнобіжного з’єднання контактів.

Групи контактів

Контакти не завжди діють незалежно друг від друга. Групою контактів називають такі контакти, котрі сполучені жорстким зв’язком і одночасно замикаються або розмикаються. На схемах (рис.18, рис.19), цей зв’язок позначається пунктирною лінією.



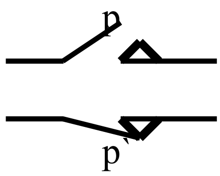
p`.   Рис.28

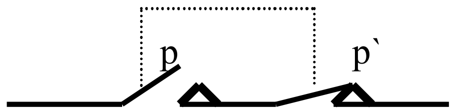


p * p` = p.   Рис.29

Якщо контакти завдяки такому зв’язку одночасно замикаються або розмикаються, то вони позначаються однією і тією ж пропозициональною змінною. Таким чином, різноманітні входження однієї і тієї ж змінної у формулу, яка описує електричну схему, визначають, що в схемі контакти, які відповідають цим входженням, механічно сполучені, тобто, утворюють групу контактів.

Два контакти можна спарити так, що, коли один із них розімкнути, то інший буде замкнутий (рис. 20). Один контакт назвемо першим, а інший – протилежним першому. Приймемо, що протилежний першому контакту –замкнутий контакт, він дорівнює 1.





p * p` = 0

p = 0,   p` = 1
p = 1,   p` = 0

Контакт, протилежний p, означимо p’

Рис.30

Дане явище можна відобразити таблицею істинності:

p	p’
1	0
0	1

Це таблиця заперечення. Формула, що виражає операцію заперечення (наприклад ~p’), описує протилежний контакт.

Інтерпретація основних логічних операцій (кон’юнкції, диз’юнкції, заперечення) свідчить, що синтез контактних схем підкорений правилам логіки висловлень, і операції над контактами можуть аналізуватися засобами логіки висловлень. Але при цьому будь-яка формула логіки висловлень повинна бути приведена до нормального виду (містити лише кон'юнкцію, диз'юнкцію, заперечення).

Необхідно мати на увазі, що контактна схема може складатися лише з одного постійно замкнутого контакту (дорівнює 1), або з одного постійно розімкнутого контакту (дорівнює 0). При конструюванні складних схем, що містять лише такі постійні контакти, уся схема по своїй дії буде еквівалентна одному з двох постійних контактів 1 або 0. Таким чином, можна побудувати логіку контактних схем, що цілком відповідає (ізоморфна) логіці висловлень.

Подібно тому, як у логіці висловлень важливий не зміст висловлення, а його істинність, так і при розгляді контактних схем інтерес подає, насамперед замкнутість визначеної схеми. Формули логіки висловлень описують стан контактів схеми. Якщо схема замкнута, то вона дорівнює 1. Якщо розімкнута – дорівнює 0.

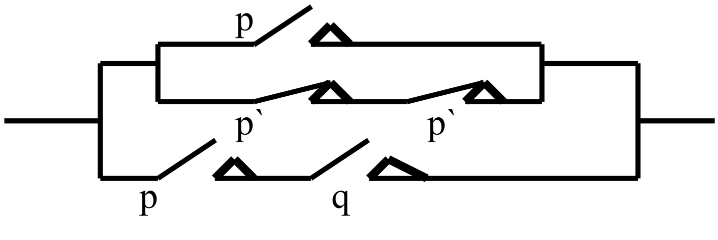
Деякі умовності:

1. Якщо в схемі два контакти позначені однією і тією ж пропозиціональною змінною, то вони завжди приймають однакові значення, тобто, вони механічно об'єднані;
2. якщо в схемі якийсь контакт є запереченням іншого контакту, то їх значення завжди протилежні, тобто, вони механічно сполучені так, що коли один із них замикається, то інший розмикається;
3. якщо у вираз входить буква без штриха, то вона позначає розімкнутий контакт, буква зі штрихом позначає замкнутий контакт.

Приклад вирішення задачі аналізу контактної схеми

Визначити умови роботи заданої схеми. Знайти, при яких положеннях контактів струм буде проходити або не проходити.

Нехай маємо схему (рис.31):



p + (p` * q`)) + (p * q) Рис.31

Цій схемі відповідає висловлення, позначене формулою:

$$p \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$

Побудувавши таблицю істинності цієї формули, бачимо, що вона помилкова лише тоді, коли p – лож, a q – істинно. Отже, струм за схемою буде проходити лише тоді, коли контакт p – розімкнутий, контакт q – замкнутий.

Це можна перевірити безпосередньо. Якщо контакт p − замкнутий, струм пройде крізь верхню гілку незалежно від стана контакту q. Якщо розімкнуті обидва контакти, а p’ і q’ будуть замкнуті, струм пройде крізь середню гілку.

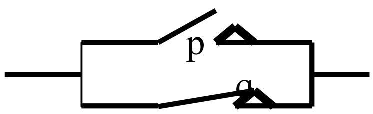


Рис.32

Формулу, що відповідає наведеній мережі можна записати таким чином $p \vee (\sim p \vee \sim q)$, що у свою чергу відповідає стану, коли дві гілки на схемі розімкнені. Таким чином, електричні властивості аналізованої схеми залишаться незмінними, якщо убрати нижню гілку. Формула – $p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ еквівалентна формулі $p, \wedge \sim q$, якій задовольняє більш проста схема (рис.32).

Еквівалентні перетворення для спрощення схем

Аналіз виявив умови, при яких можливе спрощення схем (тобто, заміна схемою з тими ж характеристиками, але з меншим числом контактів)

Важливою задачею побудови контактних схем із наперед заданими умовами роботи є задача їх синтезу, тобто, створення такого послідовно-рівнобіжного з’єднання контактів, що відповідало би необхідним умовам у відношенні провідності. Проблема для логіки висловлень складається в побудові складного висловлення з заданою таблицею істинності.

Кожне складне висловлення, що складається з трьох складових p, q, r, може бути побудоване у виді диз’юнкції основних кон’юнкцій. Оскільки, основні кон’юнкції мають вид: $p \wedge q \wedge r$, $p \wedge q \wedge \sim r$,

$p \wedge \sim q \wedge r$ і т.д., кожну з них можна уявити схемою, яка складається з трьох послідовно об’єднаних контактів – p *q * r, p * q * r’, p * q’ * r і т.д. Таку схему називають основною послідовно з’єднаною схемою. Диз’юнкція деяких основних кон’юнкцій тоді буде подана схемою, з рівнобіжним з'єднанням основних послідовно з'єднаних схем.

Отримана мережа буде простою мережею, що задовольняє даним вимогам. Метод завжди достатній для перебування однієї такої мережі. Його зручність – у стандартності.

Необхідно побудувати контактну схему висловлення (табл. 16), що має таблицю істинності 11101000. Вона складається з трьох змінних, якими є основні кон'юнкції:

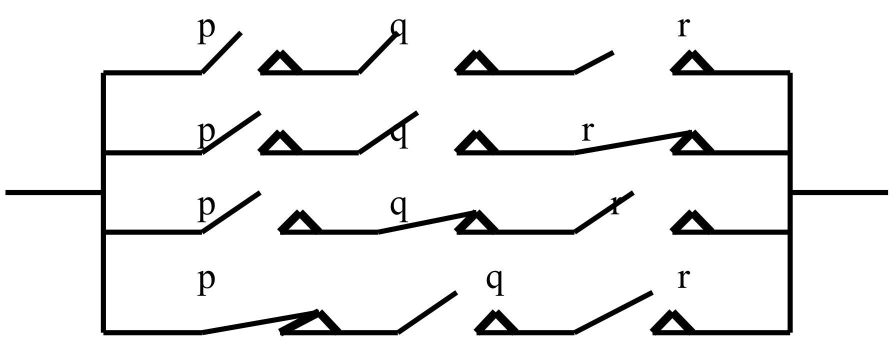
Таблиця 16

№	p	q	r	задана таблиця	Відповідність. кон'юнкції
1	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$
2	1	1	0	1	$p \wedge q \wedge \sim r$
3	1	0	1	1	$p \wedge \sim q \wedge r$
4	1	0	0	0	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$
5	0	1	1	1	$\sim p \wedge q \wedge r$
6	0	1	0	0	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$
7	0	0	1	0	$\sim p \wedge \sim q \wedge r$
8	0	0	0	0	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

Використовуючи таблицю, шукане висловлення запишемо формулою:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$$

Побудуємо відповідну контактну схему (рис. 33):



(p * q * r) + (p * q * r`) + (p * q` * r) + (p` * q * r)

Рис.33

Схема, яка задовольняє такій умові проводить струм лише тоді, коли замкнуті, принаймні, два з трьох контактів.

2.6. ГРАФИ В СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ ПОНЯТЬ

2.6.1. Означення графів, різновиди графів

Означення неорієнтованого графа

Нехай **V** – деяка непуста множина. Позначимо $\mathbf{V^{(2)}}$ – множину всіх неупорядкованих різних двоелементних підмножин множини **V**, а $\mathbf{MV^{(2)}}$ – мультимножину множини $\mathbf{V^{(2)}}$, тобто в $\mathbf{MV^{(2)}}$ можуть входити однакові пари елементів із **V**, причому цих пар може бути скільки завгодно. Декартовий квадрат множини V позначимо $\mathbf{V^2}$.

Неорієнтованим мультиграфом G називається пара (V, E), де $E \subseteq MV^{(2)}$. Елементи множини V називаються вершинами, а елементи множини E – ребрами. Ребра позначаються парами (u, v), де u, v – вершина з V.

Мультиграф G = (V, E) називається **неорієнтованим графом**, якщо $E \subseteq V^{(2)}$. Всякий граф є мультиграфом, але не всякий мультиграф буде графом. Якщо G = (V, E) – мультиграф, то E може мати кілька ребер, які з’єднують одні і ті ж вершини u і v. Такі ребра називаються кратними ребрами. Отже, граф є мультиграфом, в якого кратність кожного ребра дорівнює одиниці.

Мультиграф називається **скінченим**, якщо множини V і E скінчені. Для скінченого графа, достатньо лише скінченності множин його вершин V, оскільки скінченність V дає скінченність $V^{(2)}$, тобто граф називається скінченим, якщо скінчена множина його вершин. Скінчений граф з n вершинами називається графом n-го порядку.

Інколи розглядають графи, які мають ребра (u, u). Таке ребро називається петлею, а мультиграф, який має петлі – псевдографом.

Дві вершини u і v графа G = (V, E) **суміжні**, якщо $(u, v) \in E$, і несуміжні – в протилежному випадку. Якщо $(u, v) \in E$, то вершини u, і v називаються кінцями ребра (u, v). Множина вершин графа, суміжних з деякою вершиною u, позначається Cm(u).

З наведених означень також випливає, що різниця між графом і мультиграфом полягає в тому, що дві вершини в графі можуть бути з’єднані не більш ніж одним ребром.

Два ребра називаються **суміжними**, якщо вони мають спільний кінець. Відношення суміжності як для вершин, так і для ребер є симетричним відношенням.

Вершина u і ребро e називаються **інцидентними**, якщо u є кінцем ребра e, і неінцидентним – в протилежному випадку.

Степенем n(u) **вершини графа** G називається число інцидентних їй ребер. Вершина степені 0 називається ізольованою, а вершина степені 1 – висячою, або кінцевою. Ребро, інцидентне кінцеві вершині, також називають кінцевим.

Лема. Сума степенів всіх вершин графа є парним числом.

Кожне ребро вносить у суму всіх вершин графа число 2, тобто $\sum_{v \in V} n(v) = 2|E|$.

Наслідок. У будь-якому графі число вершин непарного степеня парне

Як показано на рис. 34, графи зручно зображувати на площині або в просторі у вигляді діаграм, які складаються з точок і відрізків, що з'єднують точки. Точки ототожнюються з вершинами, а відрізки з ребрами.

Різновиди графів

Граф, будь-які дві вершини котрого суміжні, називається повним графом. Отже, якщо G = (V, E) – повний граф, то $E = V^{(2)}$. Повний граф з n вершинами позначається K_n. На рис. 35 зображені графи K_4 і K_5.

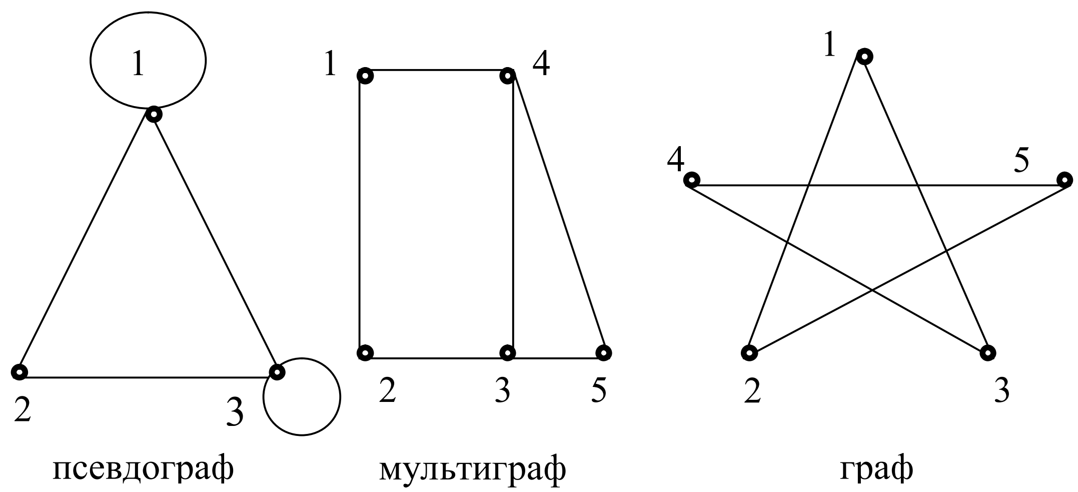
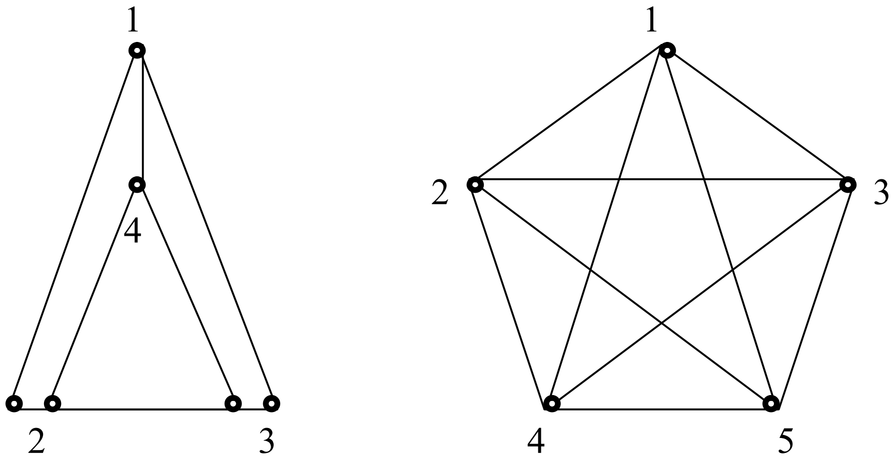


Рис. 34

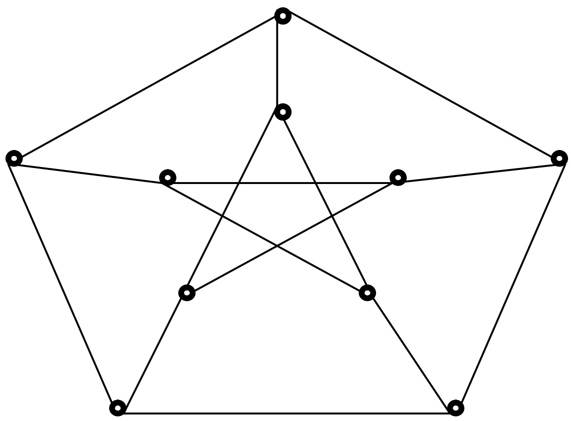


Граф K_4 Граф K_5

Рис.35

Регулярні графи

Більш загальними, ніж повні є регулярні графи. Граф називається регулярним, або однорідним, якщо його вершини мають один і той же степінь. Якщо степінь кожної вершини дорівнює k, то граф називається регулярним графом степеня k. Отже, повний граф n-го порядку є регулярним графом степеня n – 1. Регулярні графи степеня 3 (рис. 36) називають також кубічними, або тривалентними графами.



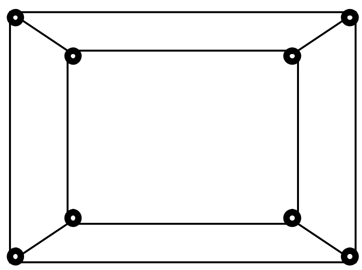
Граф Петерсона Рис.36

Повністю незв’язані графи

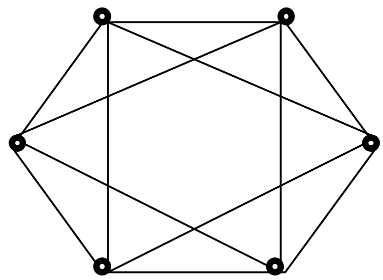
Граф, множина ребер якого пуста, називається повністю незв’язаним або пустим. Незв’язаний граф з n вершинами позначається N_n. Кожний пустий граф є регулярним графом степеня 0.

Платонові графи

Платоновими графами називаються графи, утворені вершинами і ребрами п’яти правильних многогранників – платонових тіл: тетраедра, куба, октаедра, додекаедра та ікосаедра. Графи, зображені на рис. 37, відповідають тетраедру, кубу і октаедру.



Граф, що відповідає кубу



Граф, що відповідає октаедру

Рис.37

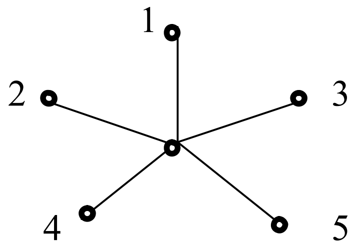
Двочастинні графи

Граф називається двочастинним, якщо існує таке розбиття множин його вершин на два класи, при якому кінці кожного ребра лежать у різних класах. Означення двочастинного графа можна подати іншим чином – в термінах розфарбування його вершин двома кольорами, наприклад червоним і синім. При цьому граф називається двочастинним, якщо його вершину можна пофарбувати синім або червоним кольором, так щоб кожне його ребро мало один кінець червоний, а другий – синій.

Якщо в двочастинному графі будь-які дві вершини з різних класів суміжні, то такий граф називається повним двочастинним графом. Повний двочастинний граф, в якого один клас має m вершин, а другий – n вершин, позначається K_{mn}.

Повний двочастинний граф (рис. 38) K_{1n} називається зірковим графом.

Аналогічно можна ввести k-частинні графи. Граф називається k-частинним, якщо існує таке розбиття множин його вершин на k класів, при якому будь-яке ребро графа з’єднує дві вершини з різних класів.



Повний двочастинний граф K_5

Рис.38

Орієнтовані графи

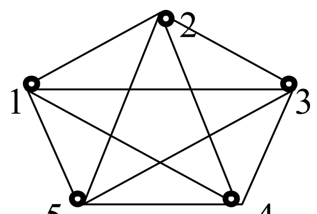
Граф G = (V, E) називається орієнтованим графом (орграфом) якщо $E \subseteq V^2$, тобто вершини всіх його ребер упорядковані. Якщо (u, v) $\in$ E, то вершину u називають початковою вершиною, а v – кінцевою вершиною ребра. Орграфи зображуються так як і графи, з тією лише різницею, що їх ребра позначаються стрілками, які ведуть з початкової вершини в кінцеву.

Граф G = (V, E) називається орієнтованим мультиграфом, якщо E $\subseteq MV^2$ і кожне його ребро упорядковане, тобто вказано, яка вершина перша, а яка друга. Отже, в орграфах ребра (u, v) і (v, u) різні

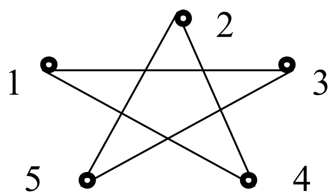
Ізоморфізм графів. Підграфи

Нехай G = (V, E), H = (V_1, E_1) – графи і h: V $\to$ V_1 – взаємооднозначна відповідність (тобто $|V| = |V_1|$). Відображення h називається ізоморфізмом графів G і H, якщо для будь-яких вершин u і v графа G їх образи h(u) і h(v) суміжні в графі H тоді і лише тоді, коли u і v суміжні в графі G. Якщо таке відображення h існує, то графи G і H називаються ізоморфними. Відношення ізоморфізму графів є відношенням еквівалентності. Ізоморфні графи як правило не розрізняються.

Граф H = ($V^|$, $E^|$) (рис. 39), називається підграфом графа G = (V, E), якщо $V^| \subseteq V$ і $E^| \subseteq E$. Якщо H підграф графа G, то H перебуває в графі G. Підграф H графа G називається остовним підграфом, коли $V^| = V$.



Граф G



Підграф H остовний для G

Рис.39

2.6.2. Операції над графами (поняттями)

Операція вилучення ребра

Нехай G = (V, E) – граф і **e** $\in$ E деяке його ребро. Граф G_1 одержано з графа G внаслідок операції вилучення ребра e якщо $G_1 = (V, E \setminus \{e\})$. Кінці ребра e не вилучаються з множини V.

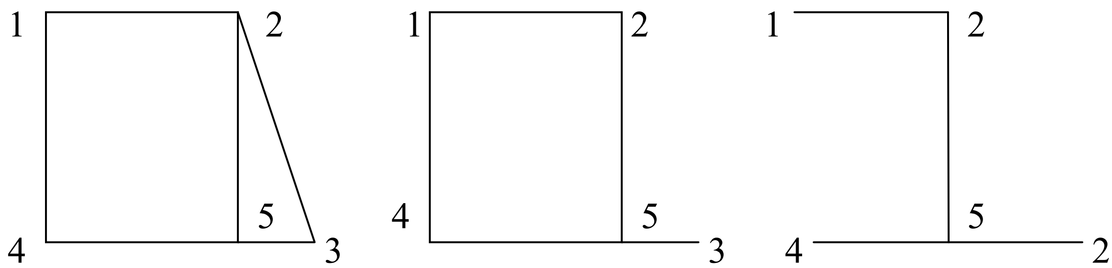
Неважко показати, що для довільних ребер **e** і $\mathbf{e_1}$ графа G виконується така тотожність: $(G - e) - e_1 = (G - e_1) - e$.

Оскільки виконується тотожність $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$, то маємо

$$G_1 = G - E = (V, E \setminus \{E\}),$$

$(G - e) - e_1 = G_1 - e_1 = (V, (E \setminus \{e\} \setminus \{e_1\}) = (V, E \setminus (\{e\} \cup \{e_1\})) = (V, E\setminus (\{e_1\} \cup \{e\})) = (V, (E \setminus \{e_1\}) \setminus \{e\}) = (G - e_1) - e$.

Отже, якщо виконується підряд кілька операцій вилучення ребра (рис. 40), то результат не залежить від порядку вилучення ребер з графа.



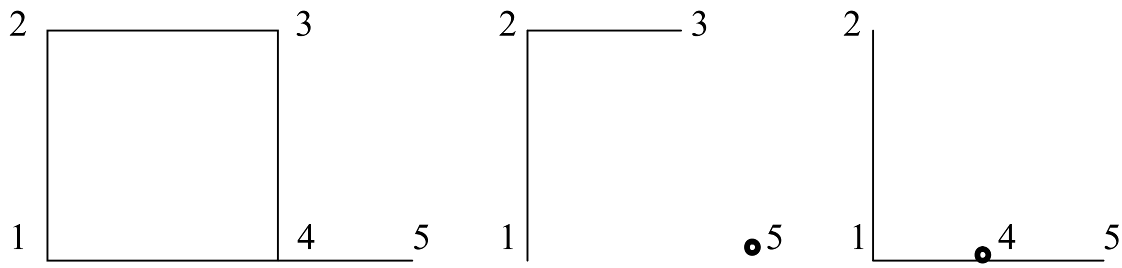
a) граф G; b) граф $G \setminus \{2, 3\}$; c) граф $(G \setminus \{(2, 3)\}) \setminus \{(1, 4)\}$.

Рис.40

Операція вилучення вершини

Нехай G = (V, E) і v $\in$ V. Граф $G_1 = G - v$ одержали з графа G внаслідок операції вилучення вершини v, якщо вершина v вилучена з V, а з E вилучені всі ребра, інцидентні з вершиною v.

Операція вилучення вершини (рис. 41) не залежить від порядку, в якому вилучаються вершини з графа



a) граф G; b) граф G – {4} c) граф G – {3}

Вилучення вершини

Рис.41

Операції вилучення ребра, вершини і перехід до підграфа – це операції, за допомогою яких можна з початкового графа одержати графи з меншим числом вершин і ребер.

Операція введення ребра

Якщо u, v $\in$ V і (u, v) $\notin$ E в графі G = (V, E), то граф G + e = (V, E $\cup$ $\cup${e}), де e = (u, v).

Внаслідок комутативності операції об’єднання множин можна стверджувати, що послідовність операцій введення ребер у граф G не залежить від порядку, у якому ці ребра вводяться в граф G. Справедлива тотожність $\forall$e, $e_1 \in E$ $((G + e) + e_1 = (G + e_1) + e)$.

Операція введення вершини в ребро

Нехай (u, v) – деяке ребро графа G. Введенням вершини w в ребро (u, v) називається операція внаслідок якої одержимо два ребра (u, w) і (w, v), а ребро (u, v) при цьому вилучається з графа G.

Операція об’єднання графів

Граф F називається об’єднанням графів G = (V, E) і H = (V_1 E_1), якщо F = (V $\cup$ V_1, E $\cup$ E_1). Граф F позначається G $\cup$ H. Об’єднання графів F = =G$\cup$ H називається диз’юнктивним, якщо V $\cap$ V_1 = $\varnothing$.

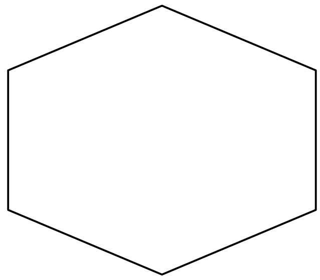
Безпосередньо з означення операції випливає, що ($\forall$ G, H) (G $\cup$ H = =H $\cup$ G).

Операція диз’юнктивного об’єднання графів дає можливість ввести до розгляду ще один важливий тип графів.

Граф називається **зв’язним**, якщо його не можна подати у вигляді диз’юнктивного об’єднання двох підграфів, і **незв’язним** – у протилежному випадку.

Отже, всякий незв’язний граф можна зобразити у вигляді диз'юнктивного об'єднання скінченого числа зв'язних підграфів. Кожний з таких зв'язних підграфів називається **компонентом зв'язності**.

Зв'язний регулярний граф степеня 2 називається **циклічним графом** (рис. 42). Циклічний граф з n вершинами позначається C_n.

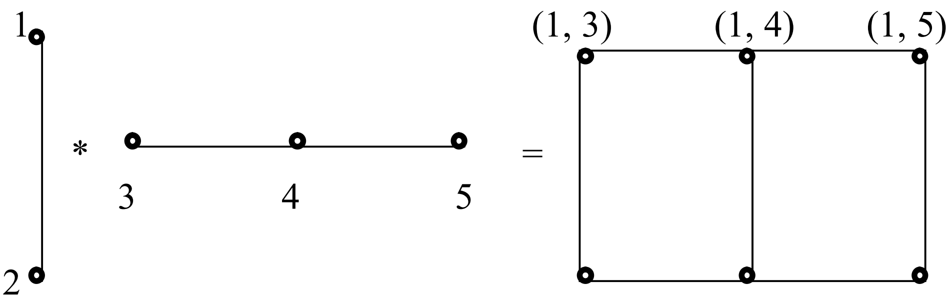


Циклічний граф

Рис.42

Добуток графів

Добутком графів $G = (V, E)$ і $H = (V_1, E_1)$ (рис. 43), називається граф $F = G * H$, у якого $V = V * V_1$, а E визначається таким чином: вершини (u, u_1) і (v, v_1) суміжні в F тоді і лише тоді, коли $u = v$, а u_1 і v_1 суміжні в H або $u_1 = v_1$, а u і v суміжні в G.



Добуток графів

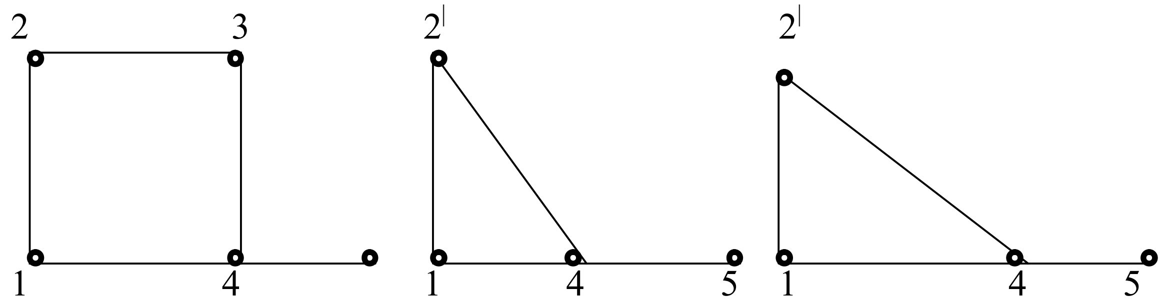
Рис.43

Ототожнення (злиття) вершин

Якщо $G = (V, E)$ – граф, u, v – дві його вершини і $Cm(u) = \{u_1, \ldots u_k\}$, $Cm(v) = \{v_1, \ldots v_l\}$, то граф $H = G - u - v$, одержаний приєднанням нової вершини $u^|$ до множини вершин H і множини ребер $(u^|, u_i)$, $(u^|, v_j)$ $(i = 1, 2, \ldots k, j = 1, 2, \ldots l)$ до множини ребер H, називається графом, одержаним із G ототожненням вершин u і v.

Операція стягування ребра

Операція стягування ребра (u, v) в графі G = (V, E) (рис. 44), означає ототожнення вершин u і v в графі G. Операція стягування ребра дає змогу ввести таке поняття. Граф G називається графом, який стягується до графа H, якщо H можна одержати з G за допомогою деякої послідовності операцій стягування ребра. легко помітити, наприклад, що граф Петерсена стягується до графа K_5 де $n < 5$. Очевидно також що всякий непустий зв'язний граф стягується до K_3. Наприклад, простий ланцюг P_n не стягується до K_3. Логічно ввести параметр $\lambda(G)$ – максимум порядків повних графів, до яких стягується граф G. Параметр $\lambda(G)$ називається числом Хадвігера графа G.

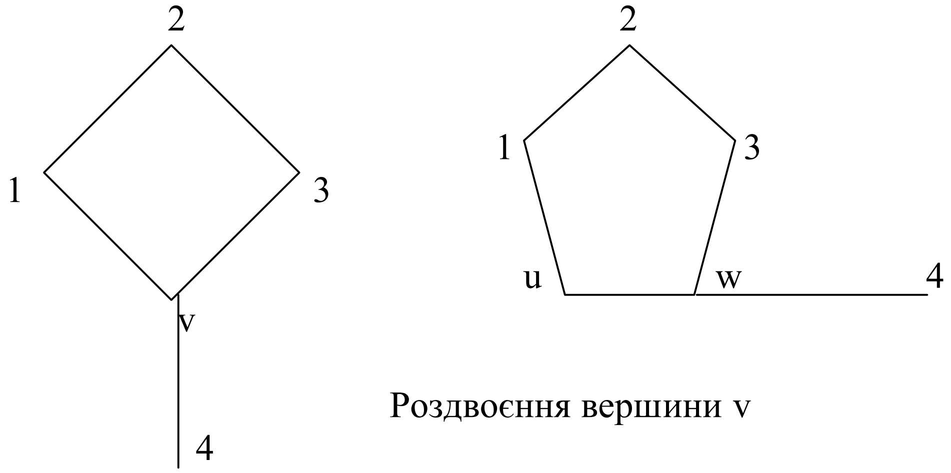


а) граф G; b) ототожнення вершин 2 і 3 в G; c) стягування ребра (2, 3) в G.

Рис.44

Операція роздвоєння (розщеплення) вершин

Нехай V – деяка з вершин графа G. Розіб'ємо множину суміжних з нею вершин на дві частини M і P, а потім виконаємо таке перетворення графа G: вилучимо вершину v разом з інцидентними їй ребрами і введемо дві нові вершини, вершини u і w разом з ребром, яке з'єднає ці вершини, вершину u з'єднаємо ребром з кожною вершиною множини M, а вершину w – з кожною вершиною множини P. Одержаний граф позначимо G^{-} і будемо вважати, що він одержаний з графа G внаслідок роздвоювання (розщеплення) вершини v (рис. 45).



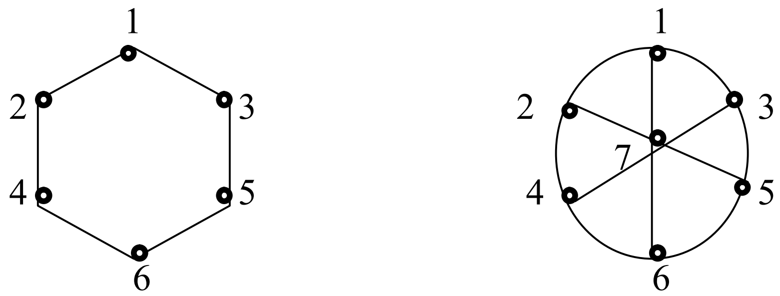
Роздвоєння вершини v

Рис.45

Операція з'єднання графів

Нехай $G = (V, E)$ і $G_1 = (V_1, E_1)$ – два графи у яких множини вершин V і V_1 не перетинаються, тобто $V \cap V_1 = \varnothing$. Операція з'єднання графів G і G_1 полягає в тому, що множини V і V_1 об'єднуються, а потім з'єднуються ребрами кожна вершина графа G з кожною вершиною G_1. Якщо E^{u} означає множину ребер, яка одержана об'єднанням множин E і E_1 разом з утвореними новими ребрами, то $G = G + G_1 = (V \cup V_1, E^{u})$.

Операція з'єднання графів (рис. 46), може бути виражена у вигляді добутку (суперпозиції) операції об'єднання графів G і G_1 та послідовності операцій введення ребра.



а) граф C_6; b) граф W_7

З'єднання графів

Рис 46.

2.6.3. Властивості графів

Маршрути, цикли, зв'язність

Маршрутом у заданому графі G = (V, E) називається скінчена послідовність його ребер, яка має вигляд (v_0, v_1), (v_1, v_2), … (v_{k-1}, v_k). Число K ребер маршруту називається довжиною цього маршруту.

Маршрут називається ланцюгом, якщо всі його ребра різні, і простим ланцюгом, якщо всі його вершини, крім можливо першої і останньої – різні

Циклом, називається циклічний ланцюг, а простим циклом – простий циклічний ланцюг.

Граф називається **антициклічним, або лісом**, якщо в ньому відсутні цикли. Безпосередньо з означення маршруту і циклу випливають такі твердження:

- будь-який маршрут, котрий з'єднує дві вершини графа, має простий ланцюг, що з'єднує ці вершини;
- будь-який цикл в графі завжди має простий цикл.

Граф називається зв'язним, якщо дві його вершини зв'язані маршрутом. Зв'язний підграф H графа G називається **максимальним**, якщо H не міститься в жодному зв'язному підграфі графа G.

Граф зв'язний тоді і лише тоді, коли його не можна представити у вигляді диз'юнктивного об'єднання двох графів. Максимальний зв'язний підграф називається **компонентом зв'язності**.

Властивості регулярних графів

Нехай G – регулярний граф степеня k. Степінь регулярного графа позначається deg(G). Очевидним наслідком означення регулярного графа є такі твердження:

- повний граф є регулярним графом;
- не існує регулярного графа G = (V, E) з n вершинами степеня k, у якого k і n непарні.

Дійсно, якщо n і k – непарні числа, то їх добуток k*n теж непарне число, але $n*k = 2|E|$.

Якщо $G = (V \cup V_1, E)$ – непустий регулярний двочастинний граф, тоді $|V| = |V_1|$, де V, V_1 – класи розбиття множин вершин графа G.

Властивості двочастинних та зв'язних графів

Існує простий критерій двочастинності графа, який виражається в термінах довжини циклів. Граф $G = (V, E)$ є двочастинним тоді і лише тоді, коли він не має циклів непарної довжини.

Визначаючи спосіб розпізнавання двочастинності графа, будемо приписувати номери 0 та 1 вершинам графа G:

- починаючи з довільної вершину u графа G, приписуємо їй номер 0;
- кожній вершині з множини Cm(u) приписуємо номер 1;
- для всіх вершин, суміжних з вершинами множини Cm(u) приписуємо номер 0;
- для всіх вершин, яким приписали номер 0, знаходимо всі суміжні з ними вершини і приписуємо їм номер 1 і т. д.

Після того, як всі вершини будуть перенумеровані таким чином, будуємо дві множини V_0 і V_1, до яких входять всі вершини з номерами відповідно 0 і 1. Якщо графи $G_1= (V_0, E_0)$ і $G_2 = (V_1, E_1)$ пусті, то граф G двочастинний, а якщо ні (тобто E_0 або E_1 непусті), то граф G не є двочастинним.

Визначимо тепер одну з властивостей зв’язних графів. Будь який граф $G = (V, E)$ єдиним способом подається у вигляді диз’юнктивного об’єднання своїх компонентів зв’язності.

Якщо граф G – граф з n вершинами і k компонентами зв’язності, то число його ребер задовольняє нерівності

$$n – k \le m\ (n – k) * (n – k + 1)/2.$$

Розрізом графа G називається така множина ребер, що розділяє граф G. Розріз графа G, який складається лише з одного ребра, називається мостом.

Нехай множина ребер довільного графа G, є множиною, що розділяє граф G. Якщо таку множину його ребер, вилучити з графа G викликає збільшення числа його компонентів зв’язності. Якщо граф G зв’язний, то вилучення множини ребер, що розділяє граф G веде до незв’язного графа.

Метричні характеристики зв’язних графів

Нехай $G = (V, E)$ – зв’язний граф, а u і v – дві його різні вершини. **Відстанню між вершинами** u і v називається довжина найкоротшого маршруту, який з’єднує вершини u і v, і позначається d(u, v). Покладемо також, що d (u, u) = 0. Очевидно, що для введеної таким чином відстані виконуються аксіоми:

1. $d(u, v) \ge 0$;
2. $d(u, v) =0$ тоді і лише тоді, коли $u = v$;
3. $d(u, v) = d(u, v)$;
4. $d(u, v) + d(u, w) \ge d(u, w)$ (нерівність трикутника).

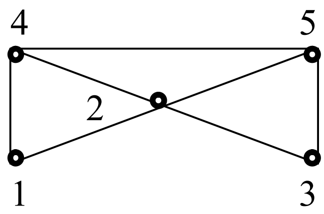
Поняття відстані між вершинами дає можливість визначити поняття степеня графа. Нехай G – зв'язний граф, k – натуральне число. Граф G^k – k-й степінь графа G, має ту ж множину вершин, що й G, а нерівні між собою вершини u і v суміжні в графі G^k тоді і лише тоді, коли $d(u, v) \le k$. Безпосередньо з цього випливає така властивість графа G^k.

Якщо $k \ge |V| - 1$, де V – множина вершин графа G, то G^k – повний граф.

Нехай u – деяка фіксована вершина графа G = (V, E). Величина $e(u) = \max d(u, v)$, $v \in V$, називається ексцентриситетом вершини u. Максимальний серед всіх ексцентриситетів вершин графа G називається діаметром графа G і позначається d(G). Отже, $d(G) = \max e(u)$, $u \in V$.

Вершина v графа G називається периферійною, якщо e(v) = d(G). Простий ланцюг довжини d(G), відстань між початковою і кінцевою вершинами якого дорівнює d(G), називається діаметральним ланцюгом.

У графі G (рис. 14) маємо d(1, 2) = 1, d(1, 3) = 2 = d(1, 5), e(1) = 2,



Граф G

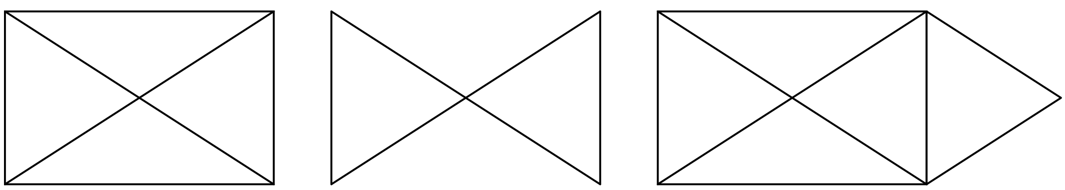
Рис.46

e(2) = 1, d(G) = 2. Всі вершини, крім вершини 2, периферійні, а (1, 2, 3) – діаметральний ланцюг.

Властивості ейлерових та гамільтонових графів

Одним з важливіших різновидів зв'язних графів є ейлерові та гамільтонові графи.

Зв'язний граф G називається ейлеровим (рис. 47), якщо існує замкнутий ланцюг, який включає кожне його ребро. Такий ланцюг називається **ейлеровим ланцюгом**.



a) неейлерів гра; b) ейлерів граф c) напівейлерів граф

Рис.47

Зв'язний граф G називається напівейлеровим (рис. 15), якщо в ньому існує ланцюг, який включає кожне його ребро. Таким чином, всякий ейлерів граф буде напівейлеровим.

Зв'язний граф G є ейлеровим тоді і лише тоді, коли кожна вершина G має парний степінь.

Нехай $G = (V, E)$ – ейлерів граф. Тоді наступна процедура завжди можлива і веде до ейлерового ланцюга в графі G: виходячи з будь-якої вершини $u \in V$, йдемо по ребрах графа G довільним чином згідно з такими правилами:

1. стираємо ребра, які пройдені, і стираємо ізольовані вершини, які при цьому виникають;
2. на кожному етапі йдемо по мосту лише тоді, коли немає інших можливостей.

Проблема існування замкнутого ланцюга, який проходить через кожне ребро зв'язного графа G, аналогічно може бути сформульована і для вершин. Тобто, чи існує замкнутий ланцюг у зв'язному графі G, який проходить рівно один раз через кожну вершину графа G. Очевидно, що такий ланцюг має бути циклом. Якщо такий цикл у графа G існує, то він називається **гамільтоновим ланцюгом**, а граф G – **гамільтоновим графом**.

Якщо в графі $G = (V, E)$ порядку n зафіксувати одну з вершин і обхід графа завжди починати з неї, то всякому гамільтоновому циклу буде відповідати перестановка елементів множини V.

2.6.4. Розфарбування графів

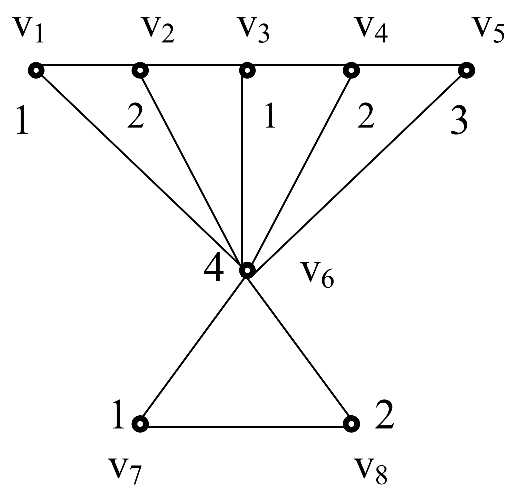
Правильне розфарбування

Нехай $G = (V, E)$ – скінчений граф, а k– деяке натуральне число. Довільна функція $f\colon V \to N_k$ де $N_k = \{1, 2, \dots k\}$, називається **вершинним k-розфарбуванням**, або просто k-розфарбуванням графа G. Розфарбування називається правильним, якщо $(\forall(u, v) \in E)\ (f(u) \neq f(v))$.

Граф, для якого існує правильне k-розфарбування, називається розфарбованим графом. При визначенні розфарбування графа множину N_k можна замінити довільною k-елементною множиною.

Правильне розфарбування графа можна трактувати як розфарбування кожної його вершини в один з k кольорів, таким чином, щоб суміжні вершини були розфарбовані в різні кольори. Оскільки функція f не обов'язково взаємно однозначна, то при k-розфарбуванні фактично може бути використано менш ніж k кольорів. Отже, правильне k-розфарбування можна розглядати як розбиття множини вершин V графа G на класи $V_1 \cup \cup V_2 \cup \ldots \cup V_i = V$, де $i \le k$, $V_i \ne \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Кожний клас V_i – незалежна множина, а самі класи називаються колірними класами.

Мінімальне число k, при якому існує правильне k-розфарбування графа G, називається **хроматичним числом** цього графа і позначається $X_p(G)$. Якщо $X_p(G) = k$, то граф G називається k-хроматичним. Правильне k-розфарбування графа G при $k = X_p(G)$ називається мінімальним (рис. 48).



На рис. 48 натуральними числами 1, 2, 3, 4 позначені фарби відповідних вершин

Рис.48

Практичні задачі, що призводять до розфарбування

Задача складання розкладу занять. Нехай потрібно прочитати кілька лекцій за найкоротший проміжок часу. Читання лекції займає одну годину, але деякі лекції не можуть читатися одночасно (наприклад, коли їх читає один лектор). Побудуємо граф G = (V, E), де V – множина, яка відповідає множині лекцій, причому дві вершини суміжні тоді і лише тоді, коли відповідні лекції не можуть читатися одночасно. Очевидно, що всяке правильне розфарбування цього графа визначає допустимий розклад: лекції, які відповідають вершинам графа, що становлять один колірний клас, читаються одночасно. Навпаки, всякий допустимий розклад визначає правильне розфарбування графа G. Оптимальний розклад відповідає мінімальним розфарбуванням, а число годин, необхідне для того, щоб прочитати всі лекції, дорівнює $X_p(G)$.

Хроматичні числа деяких графів

Для деяких простих графів неважко знайти хроматичні числа. Наприклад, $X_p(K_n) = n$, $X_p(K_n - e) = n - 1$, $X_p(K_{nm}) = 2$, $X_p(C_{2n}) =$

2, $X_p(C_{2n-1}) = 3$.

Твердження про хроматичні числа графів:

- граф є 1-хроматичним тоді і лише тоді, коли він пустий, а 2-хроматичним – коли він двочастинний і непустий, 2-хроматичні графи, називають біхроматичними;
- непустий граф є біхроматичним тоді і лише тоді, коли він не має циклів непарної довжини;
- якщо **r** означає максимальний степінь вершин графа G = (V, E), то для всякого графа G виконується нерівність $X_p(G) \le r+1$;
- всякий кубічний граф розфарбовується чотирма фарбами;
- якщо G зв'язний неповний граф і $r \ge 3$, то $X_p(G) \le 3$.

Хоча наведені твердження і дають певну інформацію про хроматичні числа графів, але їх оцінки досить неточні. Наприклад, зірковий граф $K_{1,n}$, розфарбовується n фарбами, насправді є біхроматичним.

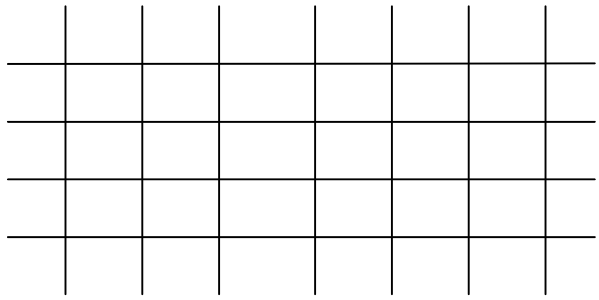
2.6.5. Нескінченні графи

Нескінченим (неорієнтованим) графом називається пара G = (V, E) де V – нескінчена множина вершин і E – нескінчена множина ребер. Якщо обидві множини V і E злічені, то граф називається **зліченим**. Слід зазначити, що ці визначення не стосуються випадку, коли V – скінчена множина, а E – нескінчена множина, або коли E – скінчена множина, а V – нескінчена множина. Граф G слід вважати скінченим, якщо він має в першому випадку скінчене число вершин і нескінчене число ребер (або петель), а в другому випадку – скінчене число ребер і нескінчене число ізольованих вершин.

Означення таких понять, як суміжні вершини, інцидентні ребра, ізоморфні графи, підграф графа, зв'язний граф, компонента зв'язності повністю переносяться на нескінчені графи.

Степенем вершин у нескінченого графа називається потужність множини ребер, інцидентних вершин v. Отже степінь вершин в нескінченому графі може бути як скінченим, так і нескінченим.

Нескінчений граф називається **локально скінченим**, якщо степінь кожної його вершини скінчений. Прикладом локально скінченого графа може бути квадратна решітка (рис. 49), складена з цілих чисел.



Локально скінчений граф Рис.49

Нескінчений граф називається **локально зліченим**, якщо кожна вершина цього графа має злічений степінь.

Для нескінчених графів дійсні наступні твердження:

- будь який зв'язний локально злічений нескінчений граф є зліченим;
- всякий зв'язний локально скінчений нескінченний граф є зліченим.

На скінчені графи переноситься і поняття маршруту, причому воно може мати такі різновиди:

- **скінчений маршрут** у нескінченому графі G визначається так, як у випадку скінчених графів;
- **нескінченим в одну сторону маршрутом** у графі G, який починається вершиною v_0, називається нескінчена послідовність ребер $(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots$;
- **нескінченим в обидві сторони маршрутом** у графі G називається нескінчена послідовність ребер $\ldots, (v_{-2}, v_{-1}), (v_{-1}, v_0), (v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots$

Нескінчені в одну і обидві сторони ланцюги і прості ланцюги визначаються так, як і поняття довжини ланцюга і відстані між вершинами. Умовні існування нескінчених ланцюгів у графах дає теорема, яка в теорії графів відома під назвою леми Кьоніга.

Лема Кьоніга. Нехай G – зв'язний локально скінчений нескінчений граф. Тоді для всякої його вершини v існує нескінчений в один бік простий ланцюг, який починається у вершині v.

Доведення. Якщо u довільна вершина графа G, відмінна від вершини v, то існує деякий простий ланцюг, який з'єднує вершини v і u. Звідси випливає, що в G повинно бути нескінченно багато простих ланцюгів з початком у вершині v. Оскільки степінь вершини v скінчений, то нескінчена множина таких простих шляхів повинна починатися з одного і того ж ребра. Якщо таким ребром є ребро (u, v_1), то повторивши цю процедуру для вершини v_1, одержимо нову вершину v_2 і відповідне їй ребро (v_1, v_2). Продовжуючи цей процес далі, одержимо нескінчений в одну сторону простий ланцюг v, v_1, v_2, …

Важливе значення леми Кьоніга полягає в тому, що вона дає можливість одержувати результати про нескінчені графи з відповідних результатів про скінчені графи.

Зв'язний злічений граф G називається **ейлеровим**, якщо в ньому існує нескінчений в обидві боки ланцюг, який містить кожне ребро графа G. Такий ланцюг називається двостороннім ейлеровим ланцюгом.

Злічений граф називається **напівейлеровим**, якщо в ньому існує нескінченний в один, або в обидва боки ланцюг, який містить в собі кожне ребро графа G.

2.6.6. Дерева та їх властивості в системі числення понять

Означення дерева. Властивості дерев

Зв'язний ациклічний граф називається (неорієнтованим) деревом. Дерево називається кореневим, якщо в ньому виділена вершина, яка називається коренем. Остовним деревом графа G називається остовний підграф графа G, який є деревом.

Щодо дерев діють наступні твердження:

- граф є деревом тоді і лише тоді, коли будь-які дві його вершини зв'язані лише одним ланцюгом;
- якщо T – дерево і u – його кінцева вершина, то граф T – u – дерево;
- всяке непусте дерево має щонайменше дві кінцеві вершини і одне кінцеве ребро;
- ребро зв'язаного графа називається суттєвим, якщо його вилучення веде до порушення зв'язності цього графа;
- якщо $T = (V, E)$ – дерево і вершина $v \in V$, то граф $T^{|} = (V \cup \{v\}, E \cup \cup\{(u, v)\})$, де u – довільна вершина із V, теж є деревом.

Якщо граф T має n вершин, тоді еквівалентні такі твердження:

- T є деревом;
- T – не має циклів і має n – 1 ребро;
- T – зв'язний граф і має n – 1 ребро;
- T – зв'язний граф, і кожне його ребро є мостом;

- Будь-які дві вершини графа T з'єднані рівно одним простим ланцюгом;
- T – не має циклів, але введення нового ребра в T сприяє виникненню рівно одного циклу;

Якщо T має цикл, то будь які дві вершини цього циклу з'єднані не менше, ніж двома простими ланцюгами. Добавляючи до графа T деяке ребро e, одержимо цикл, оскільки вершини інцидентні ребру e уже зв'язані в T простим ланцюгом.

Якщо G – ліс з n вершинами і k компонентами, тоді G має n – k ребер.

Теорема Келі. Число різних дерев, які можна побудувати на n вершинах, дорівнює n^{n-2}.

Доведення. Нехай $V = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ і $T = (V, E)$ – дерево. В T є кінцеві вершини. Нехай v_1 – перша з них і (u_1, v_1) – відповідне їй кінцеве ребро. Вилучимо з T це ребро і вершину v_1, позначимо в множині V вершину u_1 і занесемо її в список вершин L, який спочатку є пустим. Одержаний граф знову є деревом. Застосуємо до нього ту ж процедуру, одержимо нове дерево і список $L = [u_1, u_2]$ і т. д. Цю процедуру застосуємо доти, доки після вилучення ребра (u_{n-2}, v_{n-2}) не залишиться єдине ребро (u_{n-1}, v_{n-1}). Тоді список $L = [u_1, u_2, \dots u_{n-2}]$ однозначно визначиться деревом T, і двома різними деревами T і $T^|$ з n вершинами яким відповідають різні списки. Кожна вершина u з'являється в списку Ln(u) – 1 раз.

Навпаки, кожен список L визначає дерево T за допомогою зворотної побудови. Якщо задано список L, то знаходимо першу позначену вершину v_1 в множині V, таку, що $v_1 \in L$. Ця вершина визначає ребро (u_1, v_1). Далі витримаємо позначку вершини u_1 в множині V, вилучимо u_1 із L і продовжуємо побудову для нового списку L, який складається з n – 3 елементів. Одержаний внаслідок такої побудови граф є деревом.

Оскільки різних елементів в списку L може бути не більш n^{n-2}, то цим доводиться справедливість теореми.

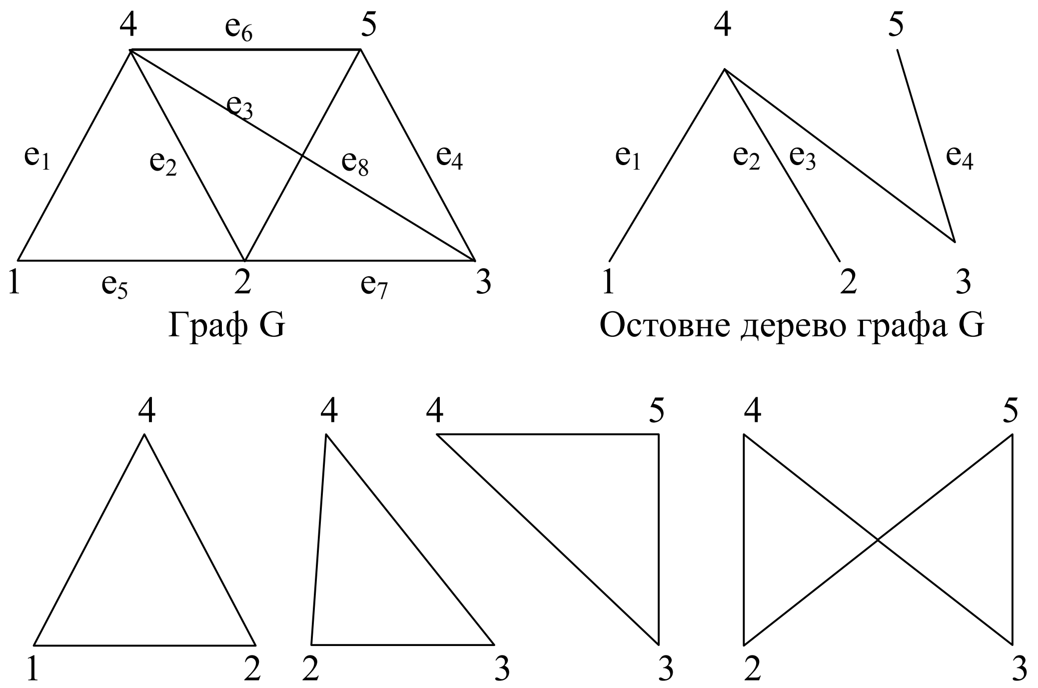
Теорема Келі має багато різних інтерпретацій. Зупинимося на одній з них, яка відома під назвою задачі про з'єднання n міст залізницями так, щоб не будувати зайвих ліній; скількома способами можна побудувати таку систему доріг?

Теорема Келі дає розв'язок цієї задачі. Для цього кожному дереву T, побудованому на n вершинах, ставиться у відповідність сума $\boldsymbol{C(T)} = \sum\limits_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in \boldsymbol{E}} \boldsymbol{c(a,b)}$. виправши серед всіх сум найменшу, одержимо розв'язок задачі. Для цього, як випливає з теореми Келі, необхідно переглянути не більш ніж n^{n-2} сум.

Застосовуючи процедуру доведення теореми Келі до кожного компонента графа G, одержимо граф, який називається **остовним лісом**. Число ребер, які при цьому вилучаються, називаються **цикломатичним числом** або **циклічним рангом графа** G і позначається C(G). Цикломатичне число є мірою зв’язності графа.

Фундаментальна система циклів графа

З поняттям остовного лісу T графа G тісно пов’язане поняття фундаментальної системи циклів, яка асоціюється з T. Нехай T – остовний ліс графа G. Якщо ввести довільне ребро в граф G, яке не входить в T, то одержимо єдиний цикл. Множина всіх циклів, які одержані в такий спосіб (шляхом введення окремо кожного ребра в граф G, яке не входить до T), називається фундаментальною системою циклів, асоційованою з T. У кожному випадку, коли нас цікавить, який остовний ліс розглядається, будемо говорити про фундаментальну систему циклів графа G (рис. 50).



Граф G

Остовне дерево графа G

Фундаментальна система циклів, асоційована з остовним деревом графа G

Рис.50

Для фундаментальної системи циклів дійсні такі твердження:

- якщо G = (V, E) довільний скінчений граф, то число ребер G, які необхідно вилучити для одержання остовного лісу T, не залежить від

порядку їх вилучення;
- граф G являє собою ліс тоді і лише тоді, коли C(G) = 0;
- всякий ациклічний підграф довільного скінченого графа G = (V, E) є підграфом остовного дерева графа G;
- всяке дерево порядку $n \geq 2$ має щонайменше дві кінцеві вершини.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ДО РОЗДІЛІВ

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ «ПОНЯТТЯ ТА ОПЕРАЦІЇ З НИМИ»

Методи завдання множин

ВИЗНАЧЕННЯ: Інтуїтивне поняття множини. Нехай **P(x)** означає деяку властивість, тоді **P(a)** буде означати ту саму властивість, а й з заміною **x** на **a**. Завдання множин в термінах властивостей досягається за допомогою інтуїтивного принципу абстракцій.

Інтуїтивний принцип абстракції, або аксіома згортання. Всяка властивість **P(x)** визначає деяку множину **A** за допомогою такої умови: елементами множини **A** є ті і лише ті предмети **a**, які мають властивість **P**.

Згідно з принципом абстракції всяка властивість **P(x)** визначає єдину множину, яку позначають {a | P(a)} і читають так: “Множина всіх тих предметів **a**, що **P(a)**”.

Зауважимо, що властивість **P** може являти собою спосіб побудови елементів множини **{a | P(a)}**.

Нехай **A** – деяка множина, а **P(x)** має вигляд $\mathbf{x \neq x}$. Тоді множина $\mathbf{\{a \in A \mid P(a)\} = \{a \in A \mid a \neq a\}}$, очевидно, не має елементів. Із принципу об’ємності випливає, що може існувати лише одна множина, яка немає елементів. Ця множина називається пустою множиною і позначається $\varnothing$.

Приклади вирішення задач з теми «Методи завдання множин»

1. Які з перелічених виразів є властивостями множин:

   a) 3 ділить x; b) $x < x$; c) $x^2 = 2$; d) $x^2 + 1 > 0$.

   Розв’язок. Властивостями є таки записи:

a) 3 ділить x; b) $x < x$; c) $x^2 = 2$; d) $x^2 + 1 > 0$.

2. Чи є властивостями множин наступні вирази:

a) для всіх x, y xy = yx; b) існує таке x, що 2x < 0

Розв'язок. Вирази:

a) для всіх x, y xy = yx; b) існує таке x, що 2x < 0 не є властивостями, тому що їх не можна характеризувати як вірні чи хибні для певного x.

Операції над множинами

ВИЗНАЧЕННЯ: Введемо символи $\Leftrightarrow$, $\exists x$, $\forall x$, $\Rightarrow$ які надалі будуть служити для скорочення виразів "тоді і лише тоді, коли", "існує x такий, що", "для всякого x" і "слідує" або "випливає" відповідно.

Множина A називається підмножиною множини B($A \subseteq B$), якщо всі її елементи є також елементами множини B($(A \subseteq B) \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$). При цьому множина B називається надмножиною множини A.

Тепер принцип об'ємності можна записати так:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ і } B \subseteq A).$$

Вираз $A \subset B$ означає, що $A \subseteq B$ і A не дорівнює B ($A \neq B$). Якщо A $\subset \subset$ B, то множина A називається власною підмножиною множини B, а множина B – власною надмножиною множини A.

Покажемо, що пуста множина є підмножиною будь-якої множини A. Припустимо, що твердження $\varnothing \subseteq A$ хибне, тобто існує хоча б один елемент x, що належить множині $\varnothing$, який не є елементом множини A. Але множина $\varnothing$ не має елементів. Отже, твердження $\varnothing \subseteq A$ є істиною.

ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ «ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ (ПОНЯТТЯМИ)»

1. Чи є множина A = {a, b, c} підмножиною множини B = {a, b, c, d, e}?

   Розв'язок. Множина A = {a, b, c} є власною підмножиною множини B = {a, b, c, d, e}.

2. Чи є множина студентів юридичного факультету підмножиною множини всіх студентів університету?

Розв'язок. Множина студентів юридичного факультету – підмножина множини всіх студентів університету.

3. Чи є множина парних натуральних чисел власною підмножиною множини всіх натуральних чисел?

Розв'язок. Множина парних натуральних чисел є власною підмножиною множини всіх натуральних чисел.

4. Чи є множина натуральних чисел підмножиною множини всіх цілих

чисел, а множина цілих чисел – підмножиною множини всіх раціональних чисел?

Розв'язок. Множина натуральних чисел є підмножиною множини всіх цілих чисел, а множина цілих чисел – підмножиною множини всіх раціональних чисел.

ВИЗНАЧЕННЯ: Нехай U – деяка множина. Тоді B(U) – множина всіх підмножин множини U. У цьому випадку множину U називають універсальною, а множину B(U) – множиною-степенем або булеаном множини U. Наприклад, якщо U = {1, 3, 5}, то B(U) = {∅, {1}, {3}, {5}, {1, 3}, {1, 5}, {3, 5}, {1, 3, 5}}. Об'єднанням множин A і B називається множина, яка складається з тих і лише тих елементів, які входять до складу хоча б однієї з цих множин. Одержана множина позначається A ∪ B тобто A ∪ B = {a | a ∈ A або a ∈ B}.

5. Визначте елементи множин A = {1, 2, 3} та B = {1, 3, 4, 6 }, які входять до об'єднання цих множин.

Розв'язок. Якщо A = {1, 2, 3} та B = {1, 3, 4, 6 } тоді A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 6}.

6. Яке нове утворення матимемо при об'єднанні П – множини всіх парних натуральних чисел, та Н – множини всіх непарних натуральних чисел?

Розв'язок. Нехай П – множина всіх парних натуральних чисел, а Н – множина всіх непарних натуральних чисел; тоді П ∪ Н = N, де N – множина всіх натуральних чисел.

ВИЗНАЧЕННЯ: Перетином множин A і B називається множина, яка складається з елементів, що входять до складу як множини A, так і множини B. Одержана множина позначається A ∩ B, тобто A ∩ B = {a | a A і a ∈ B}. Якщо A ∩ B = ∅, то множини A і B називаються такими, що не перетинаються

7. Яке нове утворення матимемо при об'єднанні A – множини прямих, які проходять через точку **a** деякої площини, B – множини прямих, які проходять через точку **c** цієї ж площини.

Розв'язок. Нехай A – множина прямих, які проходять через точку **a** деякої площини, B – множина прямих, які проходять через точку **c** цієї ж площини. Тоді A ∩ B = {l}, де l – пряма, яка проходить через точки a і **c**.

ВИЗНАЧЕННЯ: Якщо множина A являє собою об'єднання підмножин A_1, A_2, …, A_n, …, то сукупність підмножин {A_1, A_2, …, A_n,

…} називається покриттям множини А. Якщо ж сукупність підмножин покриття множини А такі, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ при i = j, то сукупність $\{A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$ називається розбиттям множини а, а підмножини A_i – класами цього розбиття, i = 1, 2, …, n, …

8. Нехай А – множина всіх студентів деякого вузу Х, які його закінчили, а A_i – підмножина тих студентів вузу Х, які закінчили i-тий факультет цього вузу. Чи є сукупність підмножин $A_1, A_2, \ldots A_к$ покриттям множини А?

Розв'язок. Оскільки невиключена можливість, що якась людина з множини А закінчила кілька факультетів даного вузу, і така людина попадає в кілька відповідних підмножин сукупностей, то ясно, що сукупність підмножин $A_1, A_2, \ldots A_к$ є покриттям множини А. Якщо ж взяти сукупність всіх студентів вузу Х, які навчаються в даний час, то сукупність студентів $A_1, A_2, \ldots, A_к$ є, очевидно, розбиттям множини всіх студентів даного вузу, які навчаються в динний час.

ВИЗНАЧЕННЯ: Різницею множин А і В називається множина $B \setminus A = =\{a \mid a \in B \text{ і } a \notin A\}$. Очевидно, що $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$. Якщо $A \subseteq B$, то $B \setminus A$ називається доповненням множини А в множині В і позначається $A'_в$ або просто A', коли В можна визначити із контексту.

Симетричною різницею множин А і В називається множина $A \div B = =(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

9. Визначте елементи, які є різницею множин A = {1, 2, 3}та B = {1, 3, 4, 5}

Розв'язок. Нехай A = {1, 2, 3}, B = {1, 3, 4, 5}. Тоді $B \setminus A = \{1, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4, 5\} = B \setminus (A \cap B) = \{1, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 3\} = \{4, 5\}$.

10. Яке нове утворення є різницею П – множини всіх парних натуральних чисел, та Н – множини всіх непарних натуральних чисел?

Розв'язок. Множина $N \setminus П = Н$, тобто $N \setminus П$ являє собою множину віх непарних натуральних чисел. Навпаки, $N \setminus Н = П$.

Визначення: Введені операції (рис. 1) називають теоретико-множинними операціями. Їх можна ілюструвати графічно за допомогою так званих діаграм Венна. На цих діаграмах множини-аргументи зображуються у вигляді областей площини, а результат виконання операцій – у вигляді заштрихованої області.

а – діаграма для $A \cup B$; б – діаграма для $A \cap B$;

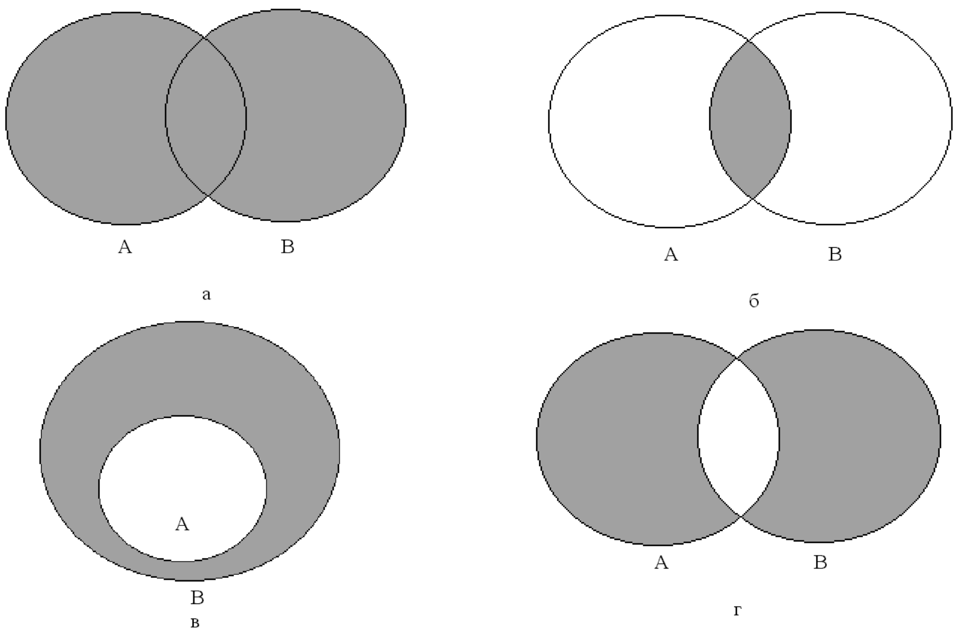


Рис. 1

в – діаграма для A'; г – діаграма для $A \div B$

Задачі і вправи до розділу «Алгебра множин (числення понять)»

Задачі і вправи до розділу «Поняття, операції над множинами»

1. Довести, що умови $A \subseteq B$, $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ еквівалентні між собою.
2. Довести, що $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$, $A \setminus B \subseteq A$.
3. Довести, що $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\} \neq \{a, b, c\}$.
4. Пояснити, чому $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ $\{1, 2\} \notin \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$.
5. Описати словами кожну з множин:

а) $\{x \in \mathbf{N} \mid x$ ділиться на 2 і x ділиться на 3$\}$;

b) $\{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$;
c) $\{x \mid x \in A$ і $x \notin B\}$;
d) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
e) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid y = 2x$ і $y = 3x\}$.

6. Нехай універсальною множиною U служить множина натуральних чисел **N**, тобто U = **N**, а

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid$ для деякого $y \in \mathbf{N}^+ \ x = 2y\}$,
b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid$ для деякого $y \in \mathbf{N}^+ \ x = 2y - 1\}$,
c) $C = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 10\}$.

Побудувати або описати словами множини

A', $(A \cup B)'$, C', $A \setminus C'$, $C' \setminus (A \cup B)$.

7. Знайти множини: $\varnothing \cap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$,

$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$.

8. Довести, що множина всіх коренів многочлена $F(x) = f_1(x) * f_2(x)$ – це об'єднання множин коренів многочленів $f_1(x)$ і $f_2(x)$.
9. Довести: $((A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap X')) =$

$= A \cap B \cap X$.

10. Довести тотожності:

a) $A \cup A' = U$;
b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
f) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
g) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;
h) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;
i) $(A' \cup B) \cap A = A \cap B$;
j) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;
k) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

Довести співвідношення:

a) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ і $B \subseteq C$;
b) $A \subseteq (B \cap C) \Leftrightarrow A \subseteq B$ і $A \subseteq C$;
c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;
d) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B') = A$;
e) $A = B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$ і $A' \cup B = U$,
де U – універсальна множина, а A' – доповнена множина A в U.

11. Чи існують такі множини A, B, C, що
$A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?
12. Знайти всі підмножини множин: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{x\}$, $\{1, 2\}$.
13. Довести, що множина A, яка складається з n елементів, має 2^n підмножин.
14. Що являє собою множина **D × D**, якщо **D** – множина дійсних чисел.
15. Довести, що $A \subseteq (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B') \subseteq C$.
16. Які з наведених нижче тверджень справедливі для будь-яких множин A, B, C: $A \subseteq B$ і $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$; $A \neq B$ і $B \neq C \Rightarrow A \neq C$;

$A \subseteq (B \cup C)'$ і $B \subseteq (A \cup C)' \Rightarrow B = 0$.

17. Нехай U – універсальна множина і $A \subseteq U$. Довести, що $U = A \Rightarrow A = U$.
18. Довести, що $A = B' \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ і $A \cup B = U$.
19. Довести, що коли $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots A_n \supseteq A_1$, то $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ для довільних множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
20. Довести, що:

a) $A \div B = B \div A$;
b) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$;
c) $A = B \Leftrightarrow A \div B = \varnothing$;
d) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$;
e) $A \div (A \div B) = B$;
f) $A \cup B = A \div B + (A \cap B)$;
g) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$;
h) $A \div \varnothing = A$;
i) $A \div A = \varnothing$
j) $A \div U = A'$.

21. Довести, що:

A) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$;
b) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C = A$;
c) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;
d) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$;
e) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$;
f) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$;
g) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$;
h) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.

22. Довести, що коли A, B, C, D – непусті множини, то:

a) $A = B$ і $C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$;

b) $A \subseteq B$ і $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$.

23. Довести, що:

a) $\mathbf{B}(A \cap C) = \mathbf{B}(A) \cap \mathbf{B}(C)$;

b) $\mathbf{B}(\cap A_i) = \cap \mathbf{B}(A_i)$;

c) $\mathbf{B}(\cup A_i) = \{\cup C_i \mid C_i \in \mathbf{B}(A_i)\}$,

де *i* пробігає деяку множину цілих чисел *I*.

24. Довести, що $\bigcap_{i=1}^{n} (B \cup A_i) = B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$.

25. Довести, що $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, u\}\} \Leftrightarrow x = z$ і $y = u$.

26. Довести, що

a) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$,

b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Відносини понять, булеві функції та відображення

27. Дати геометричну інтерпретацію відношень:

a) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid y = x\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid y \geq x\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid 0 \leq x \leq 1$ або $0 \leq y \leq 1\}$;

d) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid 0 \leq x \leq 1$ і $0 \leq y \leq 1\}$.

28. Знайти R^2 і R^{-1} для відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in N^+$ і x ділить y$\}$.

29. Довести, що для будь яких бінарних відношень мають місце нерівності:

$$(R \cup R_1)^{-1} = R^{-1} \cup R_1^{-1}, \qquad (R')^{-1} = (R^{-1})'.$$

Довести, що коли бінарне відношення R на A:

a) симетричне, то $R = R^{-1}$;

b) рефлексивне і транзитивне, то $R^2 = R$;

c) рефлексивне і антисиметричне, то $R \cap R^{-1} = i$.

30. Навести приклад бінарного відношення, яке:

a) рефлексивне, симетричне, нетранзитивне;

b) рефлексивне, несиметричне, транзитивне;

c) рефлексивне, антисиметричне, нетранзитивне;

d) нерефлексивне, симетричне, транзитивне;

31. Нехай A = {a, b, c, d, e}, а R = {(a, b), (a, c), (b, b), (c, c), (e, e), (d, d), (d, a), (d, b), (c, d), (e, d)} і R_1 = {(a, d), (d, a), (c, d), (c, c), (b, b)} – бінарні відношення на множині A.

Побудувати R^{-1}, $R \cap R_1$, $R \cup R_1$, $R \setminus R_1$, $R \div R_1$.

Чи буде відношення R, $R \cap R_1$, $R \div R_1$, $R \cup R_1$, $R \setminus R_1$ рефлексивним, симетричним, транзитивним?

Побудувати матриці відношень для R, R_1, $R \cap R_1$, $R \cup R_1$, R_i R_s, R_t, $R_1 \cup R_s$, R^2, R^3.

32. Яке відношення є транзитивним замиканням відношення “X – прямий нащадок Y”?

33. Нехай $A = \{2, 3, 5, 6, 11, 12, 14\}$ та $\leq$ – відношення часткового порядку на A, таке, що $x \leq y \Leftrightarrow$ x ділить y.

Побудувати множину відношення $\leq$ та упорядкувати множину A відносно цього порядку.

34. Показати, що відношення $\subseteq$ для множин є відношенням часткового порядку.

Для яких множин A булеан **B**(A) буде лінійно упорядкованою множиною відносно відношення $\subseteq$?

35. Довести, що коли f – функція із A в B, fg – функція із B в C, то $f * g$ є функцією із A в C.

36. Довести, що для того щоб відображення $R: A \to B$ було взаємно однозначним, необхідно і достатньо, щоб $i_A = R * R^{-1}$, $R^{-1} * R = i_{B.}$

37. Довести, що коли f – довільна функція, то $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, $(A \subseteq \subseteq B) \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$.

38. Встановити взаємнооднозначну відповідність між множинами $A \times B$ і $B \times A$.

39. Нехай $F = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Тоді множиною шахових клітинок буде $S = F \times R$. Визначити бінарне відношення C – множину допустимих ходів для тури на множині S.

40. Нехай $X = \{2, 4, 6, 8\}$ і $\varsigma = \{(x, y): x, y \in X \text{ і } x < y\}$;виписати усі елементи ς і ς^{-1}

41. Нехай $\varepsilon = P(\{a, b, c\})$. Знайти усі елементи $\subset$ (включення).

42. Задати відношення N на множині жителів однієї вулиці H, таке що h_i і h_j – сусіди ($h_i, h_j, \in H$)

a) символьне,
b) графічне,
c) у вигляді матриці.

43. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ побудувати бінарне відношення

a) рефлексивне, симетричне, не транзитивне;
b) рефлексивне, антисиметричне, не транзитивне;
c) нерефлексивне, симетричне, не транзитивне.

44. Перевірити властивості відношень

a) $A = \{1, 2, 3, 5\}$
b) $\varsigma = \{(a, b)$ a - b – чотне, для $a, b \in A\}$
c) $\varsigma = \{(a, b)$ a + b – чотне, для a, b (A}-

d) P - множина людей $\varsigma = \{(a, b) : a, b \in P$, a i b мають загального предка$\}$

45. Нехай A - множина всіх прямих на площині. Чи є еквівалентностями такі відношення: рівнобіжність; перпендикулярність.

46. На множині Q – раціональних чисел визначити відношення R у такий спосіб, a R b $\Leftrightarrow$ (a - b) – раціональне число. Довести, що R – еквівалентність.

47. Нехай τ і π відношення на N^2:

a) $(a, b)\ \tau\ (c, d) \Leftrightarrow a \le c$ і $b \le d$

b) $(a, b)\ \pi\ (c, d) \Leftrightarrow a \le c$ і $b \ge d$

Чи є τ і π відношеннями порядку.

48. Нехай R і S визначені на P - де P - множина людей

$R = \{(x, y) \mid x, y \in p$ і x - батько в$\}$;

$S = \{(x, y) \mid x, y \in p$ і x - дочка в$\}$.

Описати явно R^2; S^2; RS; SR; SR^1;
R^1S; R^1S^1; S^1R; S^1S^1; S^1R^1.

49. Описати замикання R і S

50. Зазначити області визначення і значення для відповідності «Більше», якщо A = {2, 4, 6}; R = {1, 4, 6, 7}

51. Скільки відповідностей можна встановити між елементами множин A = {k, m, n} і B = {B1, B2, B3}. Які з цих відповідностей є відображеннями? До яких типів ставляться приведені відповідності?

52. Зазначити область визначення і значення відповідності «рівність», якщо A= {-4, 5}; B = {-2, 6, 8, 9}

53. Нехай $x \in X$ и $y \in Y$ і A - відношення між елементами множин X і Y. т. е. xAy. Зазначте, у яких випадках A можна розглядати як функцію:

a) X - множина студентів, Y - множина навчальних дисциплін, xAy - «x вивчає y»

b) X - множина студентів, Y - ріст в одиницях довжини, xAy - «x має ріст y»

c) X - множина інтегральних схем друкарського вузла, Y - множина друкарських вузлів, xAy - «x входить в y».

54. Нехай A = {a, b, c, d}; B = {1, 2, 3} задати функцію з A в B

a) довільну;

b) ін’єктивну;

c) сюр’єктивну;

d) бієктивну.

ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ «ТОТОЖНА ІСТИННІСТЬ ФОРМУЛ ДЕДУКТИВНИХ УМОВИВОДІВ»

Основні визначення

Застосування союзу і **при побудові висловлень зветься** кон'юнкцією**.**

Форма запису таблиці істинності кон'юнкції:

5. p = 1 і q = 1, то (p і q) = 1;
6. p = 1 і q = 0, то (p і q) = 0;
7. p = 0 і q = 1, то (p і q) = 0;
8. p = 0 і q = 0, то (p і q) = 0.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Якщо істині висловлення, які складають, кон'юнкцію, то кон'юнкція істина, і навпаки, якщо кон'юнкція істина, то істина кожна її складова. Кон'юнкція помилкова якщо помилкова хоча б одна її складова.

Імплікативними силогізмами є теореми, які подібні логічним схемам, називаним силогізмами. В імплікаціях обидва посилання, як і висновок, мають однаково визначений вид.

Форма запису таблиці істинності імплікації:

5. p = 1 і q = 1 то (p →q) = 1;
6. p = 1 і q = 0 то (p →q) = 0;
7. p = 0 і q = 1 то (p →q) = 1;
8. p = 0 і q = 0 то (p →q) = 1.

p	q	$p \to q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Коли обидві посилки вірні, то висновок вірний. Якщо одна з посилок зрадлива, то і весь алгоритм зрадливий.

Диз'юнкція завжди є комунікативною. Вона характерна спілкою або.

Форма запису таблиці істинності диз'юнкції:

5. якщо p = 1 і q = 1 то (p або q) = 1;
6. якщо p = 1 і q = 0 то (p або q) = 1;
7. якщо p = 0 і q = 1 то (p або q) = 1;
8. якщо p = 0 і q = 0 то (p або q) = 0.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Диз'юнкція істина тоді, коли один з її членів є істинним.

Закон, що характеризує еквівалентність

Форма таблиці істинності еквівалентності:

5. якщо p = 1 і q = 1, то (p ↔ q) = 1;
6. якщо p = 1 і q = 0, то (p ↔ q) = 0;
7. якщо p = 0 і q = 1, то (p ↔ q) = 0;
8. якщо p = 0 і q = 0, то (p ↔ q) = 1;

p	q	p ↔ q
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Еквівалентність істинна коли обидва її члена одночасно або істинні, або помилкові.

Закони де-Моргана

3. [Не (**p** або **q**)] тоді і лише тоді, коли [(**не p**) і (**не q**)].
4. [Не (**q** і **не p**)] тоді і лише тоді, коли [(**не p** або **не q**)].

Обидва закони мають численні застосування, у першу чергу при підстановках.

Лема. Нехай A – формула, а B_1, B_2, …, $B_к$ – пропозиційні змінні, що входять до формули A, і нехай задана деяка інтерпретація h. Покладемо B_i' рівним B_i, якщо $h(B_i) = 1$, і рівним $\neg B_i$, якщо $h(B_i) = 0$, і, нарешті, A' рівним A, коли $h(A) = 1$, і рівним $\neg A$, коли $h(A) = 0$.

ВИЗНАЧЕННЯ**. Літерою** називається атом або заперечення атома. Диз'юнктом називається диз'юнкція літер. Одиничним диз'юнктом називається однолітерний диз'юнкт. Якщо диз'юнкт не має жодної літери, то він називається пустим диз'юнктом і позначається 0. Літери L і ¬L називаються контрарними.

Правило тавтології (ДП1). Викреслити всі тавтологічні диз'юнкти із S. Множина диз'юнктів $S^{|}$, що залишились, суперечна тоді і лише тоді, коли S суперечна.

Правило однолітерних диз'юнктів (ДП2). Якщо існує одиничний диз'юнкт L в S, то $S^{|}$ одержано з S шляхом викреслення з S тих диз'юнктів, які містять L. Якщо $S^{|}$ пустий, то S істина. В протилежному випадку будуємо множину $S^{||}$ шляхом вилучення з $S^{|}$ всіх входжень ¬L. $S^{||}$ суперечна тоді і лише тоді, коли S суперечна.

Правило чистих літер (ДП3). Літера L деякого диз'юнкта з S називається чистою в S тоді і лише тоді, коли літера ¬L не з'являється ні в якому диз'юнкті з S.

Правило розщеплення (ДП4). Якщо множину S можна подати у вигляді $(A \vee L) \wedge \ldots \wedge (A_m \vee L) \wedge (B_1 \vee \neg L) \wedge \ldots \wedge (B_n \vee \neg L) \wedge R$, де A_i, B_i, і R чисті від L і ¬L, $S_1 = A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge R$ і $S_2 = B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge R$, то S суперечна тоді і лише тоді, коли $(S_1 \wedge S_2)$ суперечна.

Приклади вирішення задач з розділу Несуперечність і повнота числення висловлень

1. Довести, що ¬P є логічним наслідком формул $P \to Q$ і ¬Q.

Розв'язок. За наслідком **леми** формула $(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$ має бути тавтологією. Користуючись таблицями істинності, знаходимо:

P	Q	¬P	¬Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge \neg Q$	$(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Отже, ¬P є наслідком формул $P \to Q$ і ¬Q.

2. Довести, що $S = (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \neg P \wedge R \wedge U$ суперечна.\

Розв'язок.

(1) $(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \neg P \wedge R \wedge U$,

(2) $(Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q) \wedge R \wedge U$ – правило **ДП2** з ¬P,

(3) $\neg R \wedge R \wedge U$ – правило **ДП2** з ¬Q,

(4) $0 \wedge U$ – правило **ДП2** з ¬R.

Оскільки останній диз'юнкт включає пустий диз'юнкт 0, то формула S суперечна.

3. Показати, що $S = (P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ несуперечна.

Розв'язок.

(1) $P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$,

(2) $P \wedge (\neg P \vee \neg R)$ – правило **ДП2** з ¬Q,

(3) ¬R – правило **ДП2** з P,

(4) 0 – правило **ДП2** з ¬R.

Остання множина являє собою пустий диз'юнкт. Отже, S несуперечна.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ «ТОТОЖНА ІСТИННІСТЬ ФОРМУЛ ДЕДУКТИВНИХ УМОВИВОДІВ»

1. Користуючись таблицями істинності, спробуйте впевнитись у тому, що логічні зв'язки ¬, ∧, ∨, які розглядаються як операції над формулами, задовольняють закони булевої алгебри.
2. Виясніть, чи є формулою числення висловлювань вираз:

a) $(A \wedge B)\ C\ \neg D$;

b) $(A \wedge B) \to C$;

c) $(A \to B) \wedge \neg B$;

d) $(((\neg A) \to B) \to \neg(C \vee D))$.

4. Скількома способами можна розставити дужки у таких виразах:

a) $A \to B \vee \neg B \wedge C$;

b) $A \to B \to C \to \neg A \to \neg B$;

c) $A \wedge B \vee C \wedge D \wedge C \wedge\vee A$?

5. Напишіть всі підформули формули:

a) $(((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (\neg A \vee C))$;

b) $((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg B))$.

5. Побудуйте таблиці істинності для таких формул:

a) $((P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P)))$;

b) $(\neg P \to \neg(Q \wedge P)) \to (P \vee R))$;

c) $((P \wedge (Q \to P)) \to \neg P)$;

d) $(((P \wedge \neg Q) \to Q) \to (P \to Q))$;

e) $((P \to (Q \vee R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$;

f) $((P \wedge (Q \wedge \neg P)) \wedge ((\neg Q \to P) \vee Q))$.

6. Доведіть, що існують інтерпретації, в яких виконуються формули:

a) $\neg(P \to \neg P)$;

b) $((P \to Q) \to (Q \to P))$;

c) $]((Q \to (P \wedge R)) \wedge \neg ((P \vee R) \to Q))$.

7. Доведіть, що приведені нижче формули є тавтологією:

a) $((P \to Q) \vee (Q \to P))$;

b) $((P \to Q) \vee (P \to \neg Q))$;

c) $(P \to (Q \to (P \wedge Q)))$;

d) $((P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R)))$;

e) $((\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P))$;

f) $(P \to (Q \to P))$;

g) $P \vee \neg P$;

h) $(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R)))$;

i) $(P \to Q) \to P$;

j) $P \to (P \vee Q)$;

k) $Q \to (P \vee Q)$;

l) $(P \vee P) \to P$;

m) $(\neg P \to (P \to Q))$.

8. При яких значеннях змінних x, y, z, u, v, w наведені нижче формули хибні:

a) $(((x \to (y \wedge z)) \to (\neg y \to \neg x)) \to \neg y)$;

b) $((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg z)$;

c) $(((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee\ ) \wedge (x \vee z)))$;

d) $(((x \vee y) \wedge ((y \vee z) \wedge (z \vee x))) \to ((x \wedge y) \wedge z))$;

e) $((x \vee y) \to ((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)))$?

9. Побудуйте доведення формули $(A \to B) = (\neg B \to \neg A)$, не користуючись теоремою дедукції.

10. Знайдіть для формули $\neg(A \to (C \Leftrightarrow B)) \to D$ еквівалентну їй формулу, яка містить лише логічні зв'язки: $\vee$ і $\neg$, $\wedge$ і $\neg$.

11. Впевніться в тому, що аксіоми логіки висловлювань і аксіоми логіки предикатів – тотожно істинні формули.

12. Знайдіть формулу логіки висловлювань, яка еквівалентна функції

x	y	f(x, y)
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

13. Покажіть, що відношення R на множині всіх формул логіки висловлювань, яке визначається у вигляді $ARB \Leftrightarrow h(A) = h(B)$ для інтерпретації h, є відношенням еквівалентності.

14. Побудуйте інтерпретацію логіки висловлювань в алгебрі множин.

15. Чи буде логічним наслідком формула $\neg C \vee \neg D$ множини формул

$(C \to \to G) \wedge (D \to S)$, $S \wedge G \to E$, $\neg E$?

16. Запищіть у вигляді формул числення висловлювань наведені нижче висловлювання і знайдіть інтерпретації, при яких вони істинні.

a) Я піду до дому (H) або залишусь тут і послухаю музику (S). Я не піду до дому. Значить, я залишусь тут і послухаю музику.

b) Якщо Джон ляже спати сьогодні пізно (S), він буде вранці не в формі (D). Якщо він ляже спати не пізно, то йому буде здаватися, що не варто жити (L). Значить, або Джон завтра буде не в формі, або йому здаватиметься, що йому не варто жити.

c) Заробітна плата зросте на (W), якщо буде інфляція (J). Якщо буде інфляція, то збільшиться вартість життя (C). Заробітна плата зросте. Значить збільшиться вартість життя.

d) Якщо 2 – просте число (P), то це найменше просте число (L). Якщо 2 – найменше просте число, то 1 не є простим числом (N). Число 1 не є простим числом. Значить, 2 – просте число.

e) Джон або перевтомився (E), або хворий (S). Якщо він перевтомився, то він дратується (C). Він не дратується. Значить він хворий.

f) Якщо я поїду автобусом (B), а автобус запізниться (L), то я пропущу важливе побачення (M). Якщо я пропущу важливе побачення я почну засмучуватись (D), то мені не слід їхати до дому (H). Якщо я не отримаю цієї роботи (I), то я почну засмучуватись і мені треба поїхати до дому. Значить, якщо я поїду автобусом і автобус запізниться, то я отримаю цю роботу.

g) Якщо 6 – складне число (S), то 12 – складне число (W). Якщо 12 – складне число, то існує росте число, то існує просте число, більше, ніж 12 (P). Якщо існує просте число, більше, ніж 12, то існує складне число більше 12 (C). Якщо 6 ділиться на 2 (D), то 6 – складне число. Число 12 складне. Отже, 6 – складне число.

h) Якщо завтра буде холодно (C), я одягну тепле пальто (H), якщо рукав буде полагоджений (S). Завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений, значить, я не одягну тепле пальто.

17. Нехай P(x) означає “x – просте число”, E(x) – “x – парне число”, O(x) – “непарне число”, D(x, y) – “y ділиться на x”. Перекладіть такі формули логіки предикатів першого порядку:

a) $P(7)$;

b) $E(2) \wedge P(2)$;

c) $\forall x\, (E(x) \wedge D(x, 6))$;

d) $\forall$ ($\neg$E(x) $\rightarrow$ $\neg$D(2, x));

e) $\forall$x (E(x) $\wedge$ $\forall$y (D(x, y) $\rightarrow$ E(y)));

f) x (P(x) $\rightarrow$ ($\exists$y) (E(y) $\wedge$ D(x, y)));

g) $\forall$(O(x) $\rightarrow$ ($\forall$y) (P(y) $\rightarrow$ $\neg$D(x, y)));

h) ($\exists$x) (E(x) $\wedge$ P(x)) $\wedge$ $\neg$($\exists$x) ((E(x) $\wedge$ P(x)) $\wedge$ (($\exists$y) (x$\neg$ = y $\wedge$ E(x) $\wedge$ P(y))).

18. Нижче наведено п’ять речень українською мовою, за якими йде стільки ж речень символічної мови предикатів першого порядку. Знайдіть відповідні пари речень, так що кожний член пари був перекладом члена, який йому відповідає.

a) Всі судді (J(x)) – юристи (L(x)).
b) Деякі юристи – шахраї (S(x)).
c) Не всі юристи – судді.
d) Жоден суддя не є шахраєм.
e) Деякі юристи – політики (P(x)).

a') $\exists$x (L(x)) $\wedge$ (S(x)).

b') $\exists$x (L(x)) $\wedge$ (P(x)).

c') ’$\neg$($\forall$x) (L(x) $\rightarrow$ J(x)).

d') $\forall$x (J(x) $\rightarrow$ L(x)).

e') $\forall$x (L(x) $\rightarrow$ $\neg$S(x)).

19. Вкажіть вільні і зв’язані входження змінних у таких формулах:

a) $\forall$z ($\forall$x A(x, y) $\rightarrow$ B(z, x));

b) $\forall$y A(z, y) $\rightarrow$ $\forall$z A(z, y));

c) ($\forall$y $\exists$y (A(x, y, f(x, y))) $\vee$ $\neg\forall$x B(y, f(x)).

20. Перекладіть на мову формул такі речення:

a) Не всі птахи можуть літати;
b) Або кожний любить кого-небудь, і ні один не любить всіх, або хтось любить всіх, і хтось не любить нікого;
c) Якщо хтось може це зробити, то і я теж можу це зробити;
d) Не всі люди щирі і не всі щирі люди багаті.

21. Чи вільний терм f(x, y) для x у формулах A(x, y) $\rightarrow$ $\forall$x B(x), ($\forall$y A(y, a)) $\vee$ $\exists$y A(x, y)?

ЗАСТОСУВАННЯ ЛОГІЧНОЇ ПОБУДОВИ КОНТАКТНИХ СХЕМ В СИМВОЛІЧНІЙ ЛОГІЦІ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Приклади вирішення задач

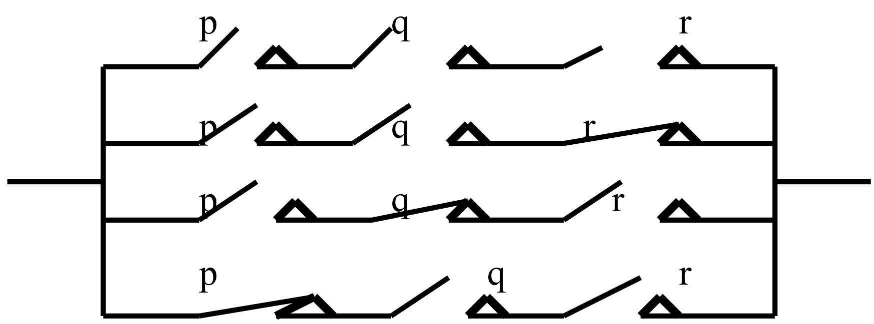
1. Побудувати контактну схему висловлення, яка складається з трьох змінних, має таблицю істинності 11101000. Її основні кон'юнкції надані в таблиці 1.

Таблиця 1

№	p	q	r	Задана таблиця	Основні кон'юнкції
1	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$
2	1	1	0	1	$p \wedge q \wedge \neg r$
3	1	0	1	1	$p \wedge \neg q \wedge r$
4	1	0	0	0	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
5	0	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$
6	0	1	0	0	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$
7	0	0	1	0	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$
8	0	0	0	0	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

Розв'язок. Використовуючи таблицю істинності, шукане висловлення запишемо формулою: $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

Побудуємо відповідну контактну схему (рис. 2).



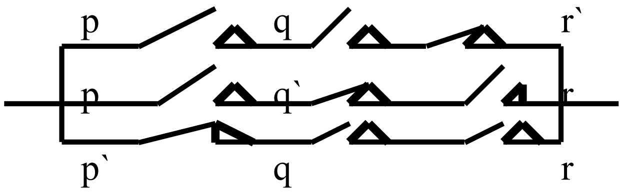
(p * q * r) + (p * q * r`) + (p * q` * r) + (p` * q * r)

Схема задовольняє такій умові: вона проводить струм тоді і лише тоді, коли замкнуті, принаймні, два з трьох контактів.

2. Використовуючи таблицю 1, побудувати схему з трьома незалежними контактами, яка проводить струм якщо замкнуті лише два контакти.

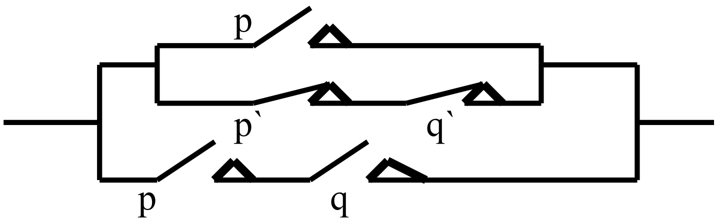
Розв'язок. Формула, що відповідає даній схемі приймає значення істина тоді і лише тоді, коли це значення приймають дві з трьох змінних. p, q, r. Це відповідає другому третьому і п'ятому рядкам таблиці 1. У цьому випадку задана таблиця усієї формули 011010000, а сама формула має вигляд: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.

Контактна схема, що моделює цю формулу представлена на рис 3. Формулу запишемо у наступному вигляді – (p * q * r’) + (p * q’ * r) + (p’ * q * r).



При рішенні такого роду задач приймемо метод синтезу (побудови) контактної схеми по їх характеристиках.

3. Визначити умови роботи заданої схеми. Знайти, при яких положеннях контактів (рис. 4) струм буде проходити або не проходити.



p + (p` * q`)) + (p * q)

Розв’язок. Наданій схемі відповідає висловлення, вираз формулою:

$$p \vee (\neg p \wedge \neg q \vee (p \wedge q)$$

Задачі та вправи

1. Використовуючи основні послідовно сполучені схеми, побудуйте мережі відповідним формулам:

   a) $p \to q$; b) $p \vee q$ c) $p \leftrightarrow q$ d) $(p \to q) \vee q$.

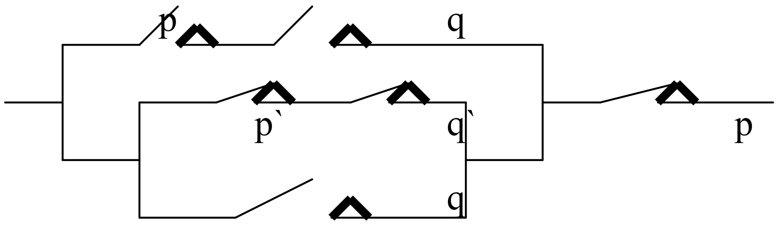
2. Накреслити схему, що відповідає формулі

   $(p \wedge \neg q \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

3. Побудувати мережу, що відповідає формулі

   $((p \vee q) \wedge r) \vee ((p \wedge r) \vee q)$

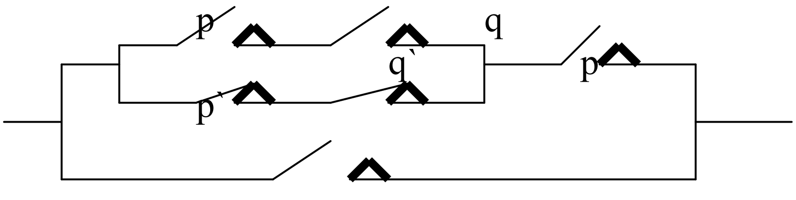
4. Побудуйте формулу схеми, яка зображення на рис. 5.



5. Побудуйте схеми, які відповідають формулі:

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \equiv (p \vee r) \wedge (\neg p \vee q).$$

6. Побудуйте схему, що відповідала б таблиці з набором значень 10110100.
7. Машина – екзаменатор дає сигнал «залік» (запалюється лампочка) тоді і лише тоді, коли студент відповідає правильно хоча б на два з трьох питань квитка. При запровадженні в машину правильної відповіді замикається контакт у ланцюзі сигнальної лампочки. Побудуйте схему й опишіть її за допомогою правил логіки висловлень.
8. Складіть формулу, що відповідає приведеній на рис. 6 схемі:



Побудувавши таблицю істинності формули, визначте умови, при яких ланцюг буде проводити струм.

10. Побудуйте й опишіть за допомогою правил логіки висловлень схему «електрифікованої версії» гри з моментами: «По встановленому сигналу кожен гравець замикає або розмикає перемикач, яким він управляє. Якщо обидва роблять те саме, то виграє гравець А; якщо ж вони роблять протилежне те виграє гравець В». У схему введіть джерело току і лампочку. Побудуйте таку схему, щоб у випадку, коли виграє А, запалювалося світло.
11. Накресліть схему з двома контактами, яка повинна замикатися тоді і лише тоді, коли замкнутий або один, або інший контакт, але не обидва разом.
12. Складіть схему з трьома незалежними контактами, котра замкнута тоді і лише тоді, коли: a) замкнуті не більш чим два контакти; b) замкнутий лише один контакт; c) розімкнутий лише один контакт.
13. Потрібно, щоб у кімнаті можна було включити і виключити світло

за допомогою любого з трьох перемикачів, розташованих на різних трьох стінах. Побудувати й описати за допомогою правил логіки висловлень таку схему.

14. Комітет, який складається з трьох чоловік, включно й голову, приймає рішення більшістю голосів, однак рішення не може бути прийняте, якщо за нього не проголосував голова. Голосування "за" проводиться натиском кнопки, яка замикає контакт. У випадку прийняття рішення замигається лампочка. Побудуйте схему, яка відповідає наведеним умовам.

15. Доведіть, що з'єднання S кінцевої кількості функціональних елементів $\varphi_1, \dots \varphi_m$ є схемою тоді і лише тоді, коли:

a) серед елементів φ_i є один і лише один елемент з вільним виходом не з'єднаним ні з яким із входів елементів φ_j (на кожному з виходів реалізується власна функція алгебри логіки);

b) вхід кожного з елементів φ_i може бути з'єднаний не більш чим з одним із виходів елементів φ_j.

c) в S немає зворотних зв'язків.

16. Визначити умови роботи схеми, яка задана формулою:

$$p \lor (\neg p \land \neg q \lor (p \land q)$$

Знайти, при яких положеннях контактів струм буде проходити або не проходити.

17. Чи отримаємо повну систему, якщо приєднаємо до елемента φ, який реалізує функцію Шеффера $\overline{xy}$ елементи, котрі реалізують константи.

18. Побудувати таблицю істинності формули: $(p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land r)$. Визначити умови, при яких ланцюг буде проводити струм.

19. Побудуйте схему з чотирма контактами, котра повинна замикатися тоді і лише тоді, коли замкнуто два парні контакти. Наведіть формули такої схеми. Побудуйте її таблицю істинності.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ В СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ ПОНЯТЬ. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ, ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Основні визначення

Неорієнтованим мультиграфом G називається пара (V, E), де $E \subseteq MV^{(2)}$. Елементи множини V називаються вершинами, а елементи множини E – ребрами. Ребра позначаються (u, v), де u, v – вершини з V.

Мультиграф G = (V, E) називається неорієнтованим графом, якщо

$E \subseteq V^{(2)}$. Всякий граф є мультиграфом, але не всякий мультиграф буде графом. Якщо G = (V, E) – мультиграф, то E може мати кілька ребер, що з'єднують одні і ті ж вершини u і v. Такі ребра називаються кратними ребрами.

Два ребра називаються суміжними, якщо вони мають спільний кінець.

Вершина **u** і ребро **e** називаються інцидентними, якщо **u** є кінцем ребра **e**, і неінцидентними в протилежному випадку.

Степенем n(u) вершини u графа G називається число інцидентних їй ребер. Вершина степені 0 називається ізольованою, а вершина степені 1 – висячою, або кінцевою. Ребро, інцидентне кінцевій вершині, також називається кінцевим.

Якщо G = (V, E) – скінчений граф порядку n, то йому відповідає квадратна матриця A(G) розмірності n ∗ n, яка називаєтьяс матрицею

$$a_{ij} \begin{cases} 1, \text{ коли вершини } v_i \text{ і } u_j \text{ суміжні} \\ 0 \text{ – в протилежному випадку} \end{cases}$$

суміжності

Приклад визначення ребер і вершин графа за допомогою матриці суміжності

Нехай маємо матрицю

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Цій матриці відповідає орграф (рис. 7)

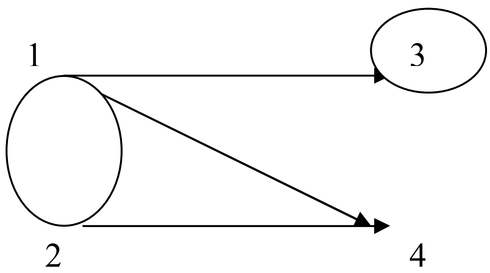


Рис.7

Всяка квадратна матриця, елементи якої 0 і 1, буде матрицею суміжності орієнтованого графа. Ранги матриць суміжностей ізоморфних графів рівні між собою.

Матриця I(G) графа G = (V, E), де V = {1, 2, … n}, E = {e_1, … e_m}, називаєтьяс матрицею інцидентності, вона задовольняє таким умовам

$$i_{kl} \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } k \text{ і ребро } e_l \text{ інцидентні} \\ 0 \text{ – в протилежному випадку} \end{cases}$$

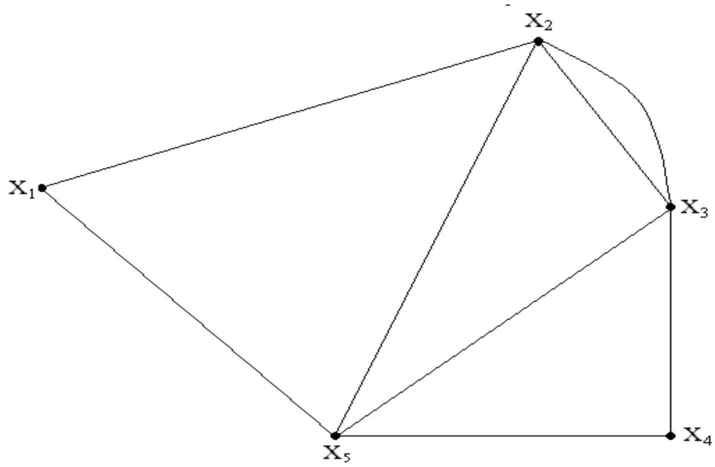
Задачі і вправи

1. Неорієнтований граф G = (V, E, O) заданий аналітичним способом. V = (v1,v2,v3,v4,v5), E = (e1,e2,e3,e4,e5,e6,e7,e8,e9,e10), O = ((v1,v1), (v1,v3), (v1,v5), (v2,v3), (v2,v4), (v2,v5), (v3, v1), (v3,v4), (v4,v2), (v4,v5)).

Необхідно:

a) задати граф геометричним способом;
b) знайти матрицю суміжності;
c) визначити степені вершин графа.

2. Задано неорієнтований граф (рис. 8).



Необхідно:

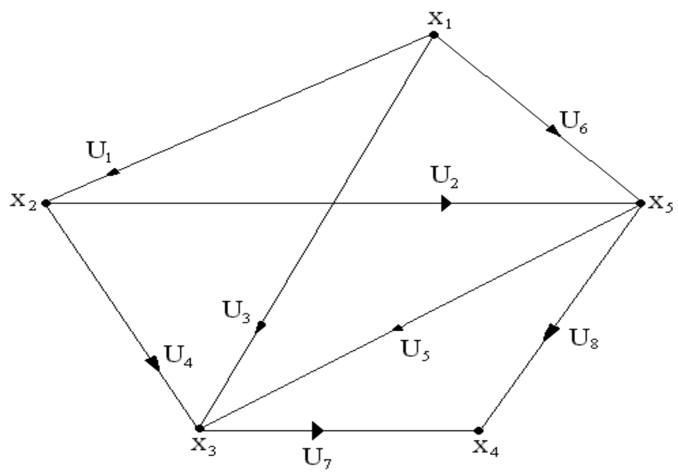
a) знайти матрицю суміжності
b) визначити степені вершин графа;

3. Орієнтований граф G = (V,E,O) заданий аналітичним способом. V = (v1,v2,v3,v4,v5), E = (e1,e2,e3,e4,e5,e6,e7,e8,e9,e10), O = ((v1,v1), (v1,v3), (v1,v5), (v2,v3), (v2,v4), (v2,v5), (v3, v3), (v3,v4), (v4,v5), (v5,v5)).

Необхідно:

a) задати граф геометричним способом;
b) знайти матрицю інцидентності;
c) визначити полу-степені вершин графа.

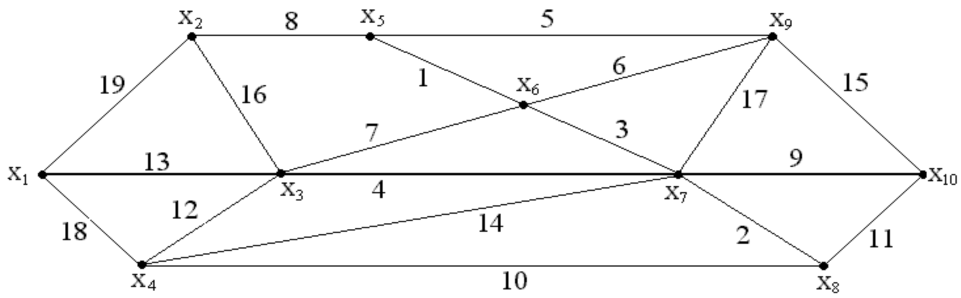
4. Задано орієнтований граф (рис. 9).



Необхідно:

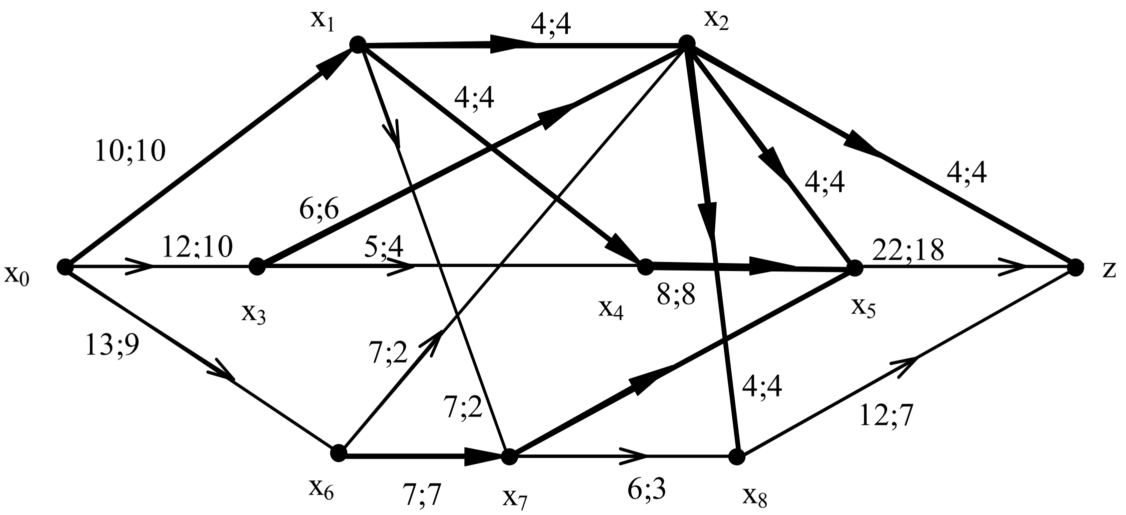
a) знайти матрицю інцидентності;

b) визначити полу-степені вершин графа.



5. Знайти **найкоротший шлях** у графі G (рис. 10) між вершинами x_1 і x_{10}.
6. Знайти **остовне** дерево **найменшої ваги** для графа з задачі №5.
7. Вирішити задачу **комівояжера**, якщо задана **матриця відстаней**

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	22	26	56	38	60
X2	34	∞	12	51	37	27
X3	45	33	∞	44	47	37
X4	39	7	16	∞	57	8
X5	35	56	40	58	∞	27
X6	9	20	36	31	18	∞



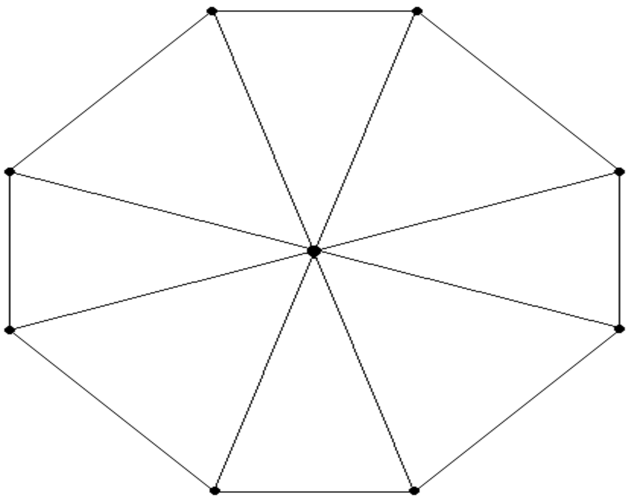
8. Знайти **максимальну** течію у мережі (рис. 11).
9. Нехай V – множина додатних цілих чисел від 1 до 20 і a|b – відношення подільності, тобто a|b означає, що число a є дільником числа b. Намалюйте граф відношення a|b для множини V.
10. Побудуйте матриці суміжності та інцидентності для платонових графів.
11. Нехай G – регулярний граф порядку n і степеня d. Покажіть, що $X_p(G) \geq \geq n / (n - d)$.
12. Граф називається **критичним**, якщо вилучення будь-якої його вершини приводить до графа з меншим хроматичним числом. Доведіть, що:

a) K_n є критичним для всіх $n > 1$;
b) C_n критичний тоді, і лише тоді, коли n непарне;
c) якщо n непарне, то з’єднання C_n і C_n є критичним графом, хроматичне число якого дорівнює 6.

13. Знайдіть Ейлерів ланцюг для графа, зображеного на рис. 12.
14. Побудуйте граф, множина вершин котрого відповідає множині курсів навчання, котрі вам необхідно пройти для отримання ступеня бакалавра. При цому, дугу от вершини x до вершини y включайте в граф лише в тому випадку, якщо курс x попередній від курсу y. Інтерпретуйте наступні елементи побудови графа:

a) путь, b) ланцюг, c) цикл, d) контур,

d) зв’язану компоненту.



15. Степінь входження $d^{-}(x)$ вершини x визначається як число дуг, які заходять у вершину x. Степінь сходу $d^{+}(x)$ вершини x визначається як число дуг, які починаються у вершині x. Степінь d(x) вершини x визначається як сума степеней входження та сходу для даної вершини. Покажіть, що в будь-якому графі G кількість вершин з непарним степенем парно. Покажіть, що для будь-якого графа G = (X, A) має місце співвідношення

$$\sum_{x\in X} d^{=}(x) = \sum_{x\in X} d^{-}(x).$$

16. Нехай T – дерево, яке покриває для графа G. Покажіть, що в G для будь-яких двох вершин існує єдиний ланцюг, який складається лише із ребер дерева T.
17. Чи можливо, щоб розтин і цикл вміщували в точності загальну дугу? Якщо неможливо, то чому?

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Абачиев С. К., Делия В. П. Теория и практика аргументации. – М. : Эдиториал УРСС, 2004. – 256 с.
2. Абеляр. Теологические трактаты. – М. : Прогресс, 1995. – 548 с.
3. Августин А. Соч. в 2-х т. Т. 1. О Граде Божьем к Мерцелину против язычников. – Киев : Типография И. И. Чоколова, 1906. – 472 с.
4. Акимов О. Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 376 с.
5. Альберт Х. Трактат о критическом разуме. – М. : Эдиториал УРСС, 2003. – 320 с.
6. Аналитическая философия. – М. : РУДН, 2006. – 340 с.
7. Аналитическая философия. Избранные тексты. – М. : МГУ, 1993. – 210 с.
8. Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. – М. : Мысль, 1976-1983.
9. Аристотель. Первая аналитика / Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с.
10. Аристотель. Вторая аналитика / Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с.
11. Аристотель. Категории / Аристотель. Собр. соч. в 4-х. томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с.
12. Аристотель. Метафизика / Аристотель. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 1. – М. : Мысль, 1976. – 550 с.
13. Аристотель. Топика / Аристотель Собр. соч. в 4-х томах. Т.2 – М. : Мысль, 1978. – 687 с.
14. Арно А., Николь П. Логика, или Искусство мыслить, где помимо обычных правил содержатся некоторые новые соображения, полезные для развития способности суждения. – М. : Наука, 1997. – 346 с.
15. Асмус В. Ф. Логика. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 290 с.
16. Ахманов А. С. Логическое учение Аристотеля. – М. : Эдиториал УРСС, 2002. – 260 с.
17. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М. : Наука, 1967. – 368 с.
18. Белов В. В., Воробьев Е. М., Шаталов В. Е. Теория графов. – М. : Высшая школа, 1976. – 392 с.
19. Березина Л. Ю. Графы и их применение. – М. : Просвещение, 1979. – 144 с.
20. Берж К. Теория графов и её применение. – М. : ИЛ., 1962. – 319 с.
21. Бочаров В. А., Маркин В. И. Основы логики. – М. : Форум – ИНФРА-М, 2005. – 378 с.
22. Войшвилло Е. К. Понятие как форма мышления. Логико-гносеологический анализ. – М. : Эдиториал УРСС, 2007. – 280 с.

23. Галилей Г. Избр. Труды. В 2-х томах. Т. 2. – М. : Наука, 1964. 428 с.

24. Гетманова А. Д. Логика. – М. : Новая школа, 1995. – 390 с.

25. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики / Логические исчисления и формализация арифметики. – М. : Наука, 1982. – 544 с.

26. Гильберт Д. Основания геометрии / О бесконечном // Д. Гильберт – М., 1948. – 368 с.

27. Горгкаймер М. Критика інструментального розуму. – К. : ППС-2002, 2006. – 280 с.

28. Гусев Д. А. Логика. Конспект лекций с задачами. – М. : Айрис Пресс, 2005. – 260 с.

29. Декарт Р. Первоначала философии / Р. Декарт. Соч. в 2-х томах. Т. 1. – М. : Мысль, 1989. – 654 с.

30. Донец Г. А. Шор Н. З. Алгебраический подход к проблеме раскраски плоских графов. – Киев : Наукова думка, 1982. – 143 с.

31. Евстегнеев В. А. Применение теории графов в программировании. – М. : Наука, 1985. – 352 с.

32. Жоль К. К. Вступ до сучасної логіки. – К. : Либідь, 2002. – 320 с.

33. Зыков А. А. Основы теории графов. – М. : Наука, 1987. – 381 с.

34. Зыков А. А. Теория конечных графов. – Новосибирск : Наука, 1969. – 543 с.

35. Ивин А. А. Импликации и модальности. – М. : ИФ РАН, 2004. – 196 с.

36. Ивин А. А. Логика. – М. : Гардарики, 2002. – 380 с.

37. Ивин А. А. Модальные теории Яна Лукасевича. – М. : ИФ РАН, 2001. – 196 с.

38. Ивлев Ю. В. Модальная логика. – М. : МГУ, 1991. – 220 с.

39. Кант И. Собр. соч. в 8 томах. – М. : «Чоро», 1994. – Т. 3. – 740 с. С. 66.

40. Кант И. Собр. соч. в 8 томах. – М. : «Чоро», 1994. – Т. 4. – 629 с. С. 35.

41. Кант И. Собр. соч. в 8 томах. – М. : «Чоро», 1994. – Т. 8. – 717 с. С. 273.

42. Кант И. Логика / И. Кант. Соч. в 8-ми томах. Т. 8. – М. : Чоро, 1994. – 718 с. – С. 276.

43. Кант И. Пролегомены ко всякой будущей метафизике, которая может появиться как наука / И. Кант. Соч. в 8-ми томах. Т. 4. – М. : Чоро, 1994. – 630 с.

44. Кантор Г. Труды по теории множеств. – М. : Наука, 1985. – 429 с.

45. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К. Основи дискретної математики / Підручник. – Київ : Наукова думка, 2002. – 578 с.

46. Кириллов В. И., Орлов Г. А., Фокина Н. И. Упражнения по логике. – М. : Проспект, 2006. – 190 с.

47. Кириллов В. И., Старченко А. А. Логика. – М. : Юристъ, 2005. – 160 с.

48. Кольман Э. Бернардо Больцано / Э. Кольман. – М. : Изд. иностранной литературы, 1975. – 1972. – 386 с.

49. Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник. – М. : Наука, 1975. – 180 с.

50. Котарбиньский Т. Элементы теории познания, формальной логики и методологии наук. – Биробиджан : Тривиум, 2000. – 290 с.

51. Кузина Е. Б. Логика в кратком изложении и упражнениях. – М. : МГУ, 2000. – 280 с.

52. Лейбниц Г. В. О самой природе, или природной силе и деятельности творений / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4 томах. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с.

53. Лейбниц Г. В. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 3. – М. : Мысль, 1984. – 733 с. – С. 412.

54. Лейбниц Г. В. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль. 1983. 685 с. – С. 152.

55. Лейбниц Г. В. Элементы универсального характера: Соч. в 4 томах. Т .3. – М. : Мысль. – 560 с.

56. Лейбниц Г. В. Замечания к общей части Декартовых «Начал» / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х томах. Т. 3. – М. : Мысль, 1984. – 734 с.

57. Лейбниц Г. В. Материя взятая в себе / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х томах. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с.

58. Лейбниц Г. В. Новая система природы и общения между субстанциями, а также о связи, существующей между душою и телом / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х томах. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с.

59. Лейбниц Г. В. Новые опыты о человеческом разумении автора системы предустановленной гармонии / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х томах. Т. 2. – М. : Мысль, 1983. – 686 с.

60. Лейбниц Г. В. О глубинном происхождении вещей / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х томах. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с.

61. Лейбниц Г. В. Об усовершенствовании первой философии о понятии субстанции / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х томах. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с.

62. Лейбниц Г. В. Опыты рассмотрения динамики. О раскрытии и возведении к причинам удивительных законов, определяющих силы и взаимодействие тел / Г. В. Лейбниц. Соч. в 4-х томах. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с.

63. Лейбниц Г. В. Рассуждение о метафизике / Г. В. Лейбниц. – Соч. в 4-х томах. Т. 1. – М. : Мысль, 1982. – 636 с.

64. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. – М. : Изд. Иностранной литературы, 1959. – 310 с.

65. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М. : Мир,

1984. – 454 с.

66. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М. : Наука, 1986. – 368 с.

67. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. / Ф. А. Медведев – М. : Наука, 1965.

68. Мельников В. Н. Логические задачи. – К.; Одесса : Выща шк., 1989. – 344 с.

69. Минто В. Дедуктивная и индуктивная логика. – Мн. : Харвест, 2002. – 388 с.

70. Непейвода Н. Н. Прикладная логика. – Новосибирск : Изд.-во Новосиб. ун.-та, 2000. – 346 с.

71. Оре О. Теория графов. – М. : Наука, 1980 – 336 с.

72. Платон. Парменид / Платон. Соч. в 3-х томах. Т. 2. – М. : Мысль, 1968. – 626 с.

73. Платон. Соч. в 4-х томах. Т. 2 – М. : Мысль, 1993. – 526 с.

74. Платон. Соч. в 4-х томах. Т. 3 – М. : Мысль, 1994. – 654 с.

75. Пуанкаре А. О науке. / А. Пуанкаре – М. : Наука, 1983. – 559 с.

76. Рассел Б. Введение в математическую философию. – М. : «Гнозис», 1996. – 240 с.

77. Сваами М., Тсуласираман К. Графы сети и алгоритмы. – М. : Мир, 1984. – 454 с.

78. Татт У. Теория графов. – М. : Мир, 1988. – 349 с.

79. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М. : Мир, 1977. – 207 с.

80. Фреге Г. Запись в понятиях / Г. Фреге // Логика и логическая семантика. – М. : Аспект Пресс, 2000. – 510 с.

81. Фреге Г. Логические исследования / Г Фреге // Логика и логическая семантика. – М. : Аспект Пресс, 2000. – 510 с.

82. Фреге Г. Основоположения арифметики / Г. Фреге. – Томск : Изд. Водолей, 2000. – 127 с.

83. Харри Ф. Теория графов. – М. : Мир, 1973. – 300 с.

Навчальне видання

ЕЛЕМЕНТИ КЛАСИЧНОЇ ЛОГІКИ

Навчальний посібник

Колектив авторів

За загальною редакцією
доктора філософських наук, професора
Кузьменка Вячеслава Віталійовича

Редактор *О.П. Антіпова*

Дизайн – *В.А. Ситник*

Підп. до друку 27.05.2016. Формат 60x84/16. Друк цифровий. Папір офсетний.
Гарнітура Times. Ум.-друк. арк. 14,50. Обл.-вид. арк. 14,75. Тираж 100 прим.

Редакційно-видавниче відділення ДДУВС
49005, м. Дніпропетровськ, просп. Гагаріна, 26, тел. (056) 370-96-59
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДП № 164-р від 07.08.2013

ПП «Ліра ЛТД»
49000, м. Дніпропетровськ, вул. Полігонна, 25/57, тел. (056) 731-96-57
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 188 від 19.09.2000